АКАДЕМИЯ НАУК СССР

MTA Számítástechnikai Könyvtára

# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI

2

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

**Редакционная коллегия:**

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ,
Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Н. КАЗАНЦЕВ,
С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН,
А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ,
Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
196 2 év 482 sz.

# РАДИОТЕХНИКА
# И
# ЭЛЕКТРОНИКА

MTA Számítástechnikai Könyvtára

**Том VI** ФЕВРАЛЬ 1961 **Вып. 2**

СОДЕРЖАНИЕ

**Лезин Ю. С.** Накопление шумов в устройствах с задержанной обратной связью 187
**Нудельман И. Я.** К вопросу о линейной коррекции переходных процессов в системах с конечной шириной полосы пропускания . . . . . 193
**Линь Хай-цюань.** К вычислению пропускной способности двухлучевых каналов связи . . . . . 197
**Линь Хай-цюань.** О пропускной способности однолучевых и двухлучевых каналов связи при поляризационных замираниях . . . . . 200
**Шабельников А. В.** Метод возмущений и его связь со строгим дифракционным методом при решении задач некогерентного рассеяния . . . . . 204
**Пономарев Н. Г.** Графический метод построения профилей апланатических антенн . . . . . 214
**Терешин О. Н., Соколов А. Е.** Подавление токов, возбуждаемых на металлическом экране дифракционной антенной конечных размеров . . . . . 221
**Каценеленбаум Б. З., Малина З. А.** Расчет переходов для симметричной магнитной волны в круглом волноводе . . . . . 228
**Фельдштейн А. Л.** Синтез ступенчатых направленных ответвителей . . . . . 234
**Казанцев Ю. Н.** Об измерении затухания в волноводах . . . . . 241
**Муромцев В. И., Пискунов А. К.** Некоторые вопросы согласования тракта СВЧ в радиоспектроскопах . . . . . 250
**Рапопорт Г. Н.** Усилитель обратной волны в режиме сильных сигналов . . . . . 261
**Касаткин Л. В.** Об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов в средах с индуктивной проводимостью . . . . . 267
**Игрицкий А. Л.** Расчет магнитного периодического фокусирующего устройства для лампы бегущей волны . . . . . 275
**Лобов Г. Д., Еремеев В. И.** Некоторые эффекты, сопровождающие детектирование в газовом разряде . . . . . 286
**Елинсон М. И., Степанов Г. В., Покалякин В. И.** Эмиссия горячих электронов из $p$ — $n$-переходов в кристаллах SiC . . . . . 292
**Фурсей Г. Н.** Автоэлектронная эмиссия с монокристаллов вольфрама, предшествующая развитию вакуумной дуги . . . . . 298
**Мякишев Г. Я.** К теории статической характеристики плоского диода без накаленного катода с учетом теплового распределения электронов по скоростям 303
**Носов Ю. Р.** Переходные процессы в полупроводниковых диодах при коротких импульсах прямого тока . . . . . 313
**Григорьянц В. В., Жаботинский М. Е.** Молекулярный стандарт частоты с вычитанием ошибки опорного генератора . . . . . 321

*КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ*

**Михайловский Л. К.** Широкополосное усиление с преобразованием частоты . . . . . 329
**Елькинд А. И.** Подавление гармоник в коаксиальных резонаторах . . . . . 331
**Бахрах Л. Э., Сулимин А. Д.** К расчету электронных прожекторов ленточного потока . . . . . 333
**Елинсон М. И., Горьков В. А.** Некоторые особенности работы автоэлектронных катодов в электрических полях СВЧ . . . . . 336
**Макуха В. И.** Адсорбция кальция на вольфраме . . . . . 339
**Макуха В. И.** Адсорбция стронция на вольфраме . . . . . 342
**Васильев В. П., Помазков В. П.** Определение свободного бария в оксидном катоде методом радиоактивных индикаторов . . . . . 343

Адрес редакции: Москва, К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-00371 Подписано к печати 25/I 1961 г. Тираж 5700 экз. Заказ № 1207
Формат бумаги 70×108 1/10. Бум. л. 5,0 Печ. л. 13,7+3 вкл. Уч.-изд. л. 14,7

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 2

# НАКОПЛЕНИЕ ШУМОВ В УСТРОЙСТВАХ С ЗАДЕРЖАННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*Ю. С. Лезин*

Методом медленно меняющихся величин определена мощность шумов на выходе накопительных устройств с задержанной обратной связью.

## ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим элементом оптимальных фильтров для последовательностей импульсных сигналов [1] является суммирующее устройство, в цепь обратной связи которого включена линия задержки на время, равное периоду повторения $T$ этих сигналов. Равенства периода повторения сигналов и времени задержки в цепи обратной связи можно с достаточной для практики точностью добиться теми же методами, что и в системах селекции движущихся целей [2]. Однако подобное суммирующее устройство самовозбуждается, вследствие того, что величина коэффициента положительной обратной связи в нем равна единице.

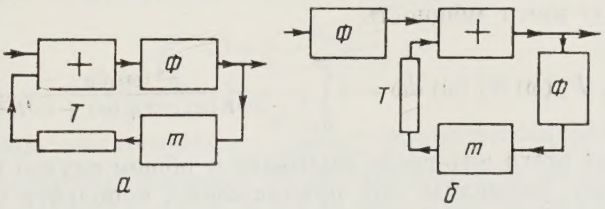



Рис. 1. Блок-схема накопителя с задержанной обратной связью

Практическим приближением к такому устройству является накопитель с положительной обратной связью, задержанной на время $T$. Для устойчивой работы коэффициент обратной связи накопителя должен быть меньше единицы. Блок-схема накопителя (рис. 1, *а*) состоит из суммирующего устройства, ослабителя с коэффициентом передачи $m$ (равным коэффициенту обратной связи на достаточно низких частотах), линии задержки на время $T$ и фильтра $\Phi$ с передаточной функцией

$$K^*(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\delta} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{2\pi\Delta F}},$$

где $\delta$ — постоянная времени фильтра; $\Delta F$ — его полоса пропускания на уровне $1/\sqrt{2}$. Эта передаточная функция совпадает (с точностью до постоянного множителя) с частотной характеристикой некорректированного усилителя на сопротивлениях в области высоких частот.

Все элементы накопителя, кроме фильтра, имеют равномерные амплитудно-частотные характеристики, простирающиеся, по крайней мере, до частот, на которых модуль передаточной функции фильтра становится пренебрежимо малым. Предполагается линейность всех элементов.

Накопление импульсных сигналов в таких устройствах с задержанной обратной связью проанализировано в [3].

В настоящей статье рассмотрено накопление белых нормальных шумов с энергетическим спектром

$$F_1(\omega) = a.$$

Полученные результаты справедливы и для случая прохождения белых нормальных шумов через фильтр $\Phi$ и последующего накопления устройством с задержанной обратной связью (рис. 1, *б*).

## 1. НАКОПЛЕНИЕ ШУМОВ В ОДНОМ НАКОПИТЕЛЕ С ЗАДЕРЖАННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Передаточная функция такого накопителя описывается выражением

$$K_1^*(\omega) = \frac{K^*(\omega)}{1 - mK^*(\omega)e^{-j\omega T}} = \frac{K(\omega)\, e^{-j\operatorname{arc\,tg}\omega\delta}}{1 - mK(\omega)e^{-j\psi(\omega)}},$$

а квадрат ее модуля

$$K_1^2(\omega) = \frac{K^2(\omega)}{1 - 2mK(\omega)\cos\psi(\omega) + m^2K^2(\omega)},$$

где

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\delta^2}} \tag{1}$$

— модуль передаточной функции фильтра $\Phi$;

$$\psi(\omega) = \omega T + \operatorname{arc\,tg}\omega\delta. \tag{2}$$

Поэтому накопленный шум на выходе накопителя с задержанной обратной связью имеет мощность

$$\sigma_2^2 = \int_0^\infty F_1(\omega)\, K_1^2(\omega)\, d\omega = a\int_0^\infty \frac{K^2(\omega)\, d\omega}{1 - 2mK(\omega)\cos\psi(\omega) + m^2K^2(\omega)}. \tag{3}$$

Вычисление этого интеграла вызывает в общем случае большие трудности. Поэтому вычислим его приближенно, используя то характерное для рассматриваемых устройств обстоятельство, что постоянная времени фильтра очень мала по сравнению со временем задержки:

$$\delta \ll T. \tag{4}$$

Благодаря этому можно применить для вычисления (3) метод медленно меняющихся величин [4]. Действительно, второй член знаменателя подынтегрального выражения в (3) содержит быстро осциллирующий множитель $\cos\psi(\omega) = \cos(\omega T + \operatorname{arc\,tg}\omega\delta)$, а остальные члены подынтегрального выражения сравнительно медленно изменяются с частотой. При изменении последней на период осциллирующего множителя остальные члены знаменателя и числитель практически остаются неизменными.

Разобьем интервал интегрирования в (3) на отдельные участки, каждый из которых будет соответствовать периоду изменения осциллирующего множителя:

$$\sigma_2^2 = a\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\omega_l}^{\omega_{l+1}} \frac{K^2(\omega)\, d\omega}{1 - 2mK(\omega)\cos\psi(\omega) + m^2K^2(\omega)},$$

где $\omega_l$ и $\omega_{l+1}$ — частоты, соответствующие началу и концу $l$-го периода:

$$\psi(\omega_l) = 2\pi l, \qquad \psi(\omega_{l+1}) = 2\pi(l+1).$$

В силу (4) величина этого периода приближенно равна частоте повторения

$$\Omega_l = \omega_{l+1} - \omega_l \simeq \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Произведем под интегралом замену переменной по закону $x=\omega-\omega_l$:

$$\sigma_2^2 = a\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\Omega_l}\frac{K^2(\omega_l+x)\,dx}{1-2mK(\omega_l+x)\cos\psi(\omega_l+x)+m^2K^2(\omega_l+x)}.$$

Вследствие (4) при $0<x<\Omega_l$ имеем

$$K(\omega_l+x)\simeq K(\omega_l),$$

$$\cos\psi(\omega_l+x)\simeq\cos xT$$

и поэтому

$$\sigma_2^2\simeq a\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\Omega_l}\frac{K^2(\omega_l)\,dx}{1-2mK(\omega_l)\cos xT+m^2K^2(\omega_l)}\simeq$$

$$\simeq\frac{2a}{T}\sum_{l=0}^{\infty}K^2(\omega_l)\int_0^{\pi}\frac{dy}{1-2mK(\omega_l)\cos y+m^2K^2(\omega_l)}.$$

Пользуясь формулой 3.451.2 [5], получим

$$\sigma_2^2\simeq a\Omega\sum_{l=0}^{\infty}\frac{K^2(\omega_l)}{1-m^2K^2(\omega_l)}\simeq a\sum_{l=0}^{\infty}\frac{K^2(\omega_l)}{1-m^2K^2(\omega_l)}\Delta\omega_l.$$

Этот результат можно получить и методом стационарной фазы [6].

Поскольку величина $l$-го периода функции $\cos\psi(\omega)$ ввиду (4) весьма мала по сравнению с шириной полосы пропускания, а следовательно, и шириной спектра шума на выходе, то последнюю сумму можно приближенно заменить интегралом:

$$\sigma_2^2\simeq\int_0^{\infty}a\frac{K^2(\omega)}{1-m^2K^2(\omega)}\,d\omega. \tag{5}$$

Подынтегральное выражение $a\dfrac{K^2(\omega)}{1-m^2K^2(\omega)}$ можно рассматривать как энергетический спектр накопленного шума, усредненный по периоду осциллирующего множителя $\cos(\omega T+\operatorname{arc\,tg}\omega\delta)$. Подставляя (1) в (5) и вычисляя, получим

$$\sigma_2^2\simeq\frac{\pi^2a\Delta F}{\sqrt{1-m^2}}. \tag{6}$$

Итак, мощность накопленного шума пропорциональна интенсивности шума на входе и полосе пропускания фильтра $\Phi$.

Чтобы определить мощность ненакопленного шума, т. е. шума, поступившего на выход непосредственно, минуя цепь обратной связи, достаточно положить в последнем соотношении $m=0$:

$$\sigma_{20}^2=\pi^2a\Delta F.$$

Поэтому коэффициент накопления шума по мощности в накопителе задержанной обратной связью равен

$$g_1\simeq\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Если же применить прямоугольную аппроксимацию амплитудно-частотной характеристики петли задержанной обратной связи накопителя, т. е. считать фильтр идеальным фильтром нижних частот, то коэффициент накопления шума по мощности окажется равным [7]

$$g'=\frac{1}{1-m^2}.$$

Зависимости коэффициентов накопления шума в рассматриваемом накопителе и в накопителе с идеальным фильтром от величины коэффициента обратной связи представлены соответственно кривыми *1* и *2* на рис. 2. Шумы в исследуемом реальном накопителе накапливаются до значительно меньшего уровня, чем в идеализированном накопителе с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой петли задержанной обратной связи. Это объясня-

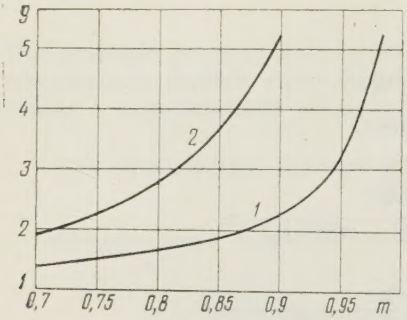



Рис. 2. Коэффициенты накопления шума одним накопителем (*1*) и накопителем с идеальным фильтром (*2*) в зависимости от величины коэффициента обратной связи

ется сужением энергетического спектра шума при его циркуляции по петле обратной связи в реальном накопителе. В идеализированном же накопителе энергетический спектр шума при этой циркуляции каждый раз только равномерно ослабляется в $m$ раз, и его ширина остается неизменной.

## 2. НАКОПЛЕНИЕ ШУМОВ В ДВУХ И ТРЕХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ С ЗАДЕРЖАННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Шум на выходе двух последовательно включенных одинаковых накопителей, каждый из которых охвачен задержанной на время $T$ обратной связью и выполнен по блок-схеме, изображенной на рис. 1, имеет мощность

$$\sigma_3^2 = \int_0^\infty F_1(\omega)\, K_1^4(\omega)\, d\omega = a \int_0^\infty \frac{K^4(\omega)\, d\omega}{[1 - 2mK(\omega)\cos\psi(\omega) + m^2K^2(\omega)]^2}.$$

Для приближенного вычисления этого интеграла усредним гребенчатый энергетический спектр выходного шума по периоду быстро осциллирующего множителя $\cos\psi(\omega)$. В результате этого получим

$$\sigma_3^2 \simeq a \int_0^\infty \frac{[1 + m^2K^2(\omega)]\, K^4(\omega)}{[1 - m^2K^2(\omega)]^3}\, d\omega.$$

Подставляя (1) в полученное выражение, преобразуя и применяя формулу 3.191.3 [5], определим мощность накопленного шума

$$\sigma_3^2 \simeq \frac{a\pi^2\Delta F}{4} \frac{2 + m^2}{(1 - m^2)^{5/2}}, \tag{7}$$

а затем и коэффициент накопления шума двумя накопителями с задержанной обратной связью

$$g_2 = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_3^2(m = 0)} \simeq \frac{2 + m^2}{2(1 - m^2)^{5/2}}. \tag{8}$$

Он меньше коэффициента накопления шума двумя накопителями с прямоугольными амплитудно-частотными характеристиками петель задержанной обратной связи

$$g'' = \frac{1 + m^2}{(1 - m^2)^3}.$$

Зависимости коэффициентов накопления шума двумя накопителями от коэффициента обратной связи для случаев рассматриваемой и прямо-

угольной амплитудно-частотных характеристик представлены на рис. 3 (соответственно кривые *1* и *2*).

Отношение коэффициентов накопления шума двумя и одним накопителями с задержанной обратной связью равно

$$\lambda_2 = \frac{g_2}{g_1} = \frac{2 + m^2}{2(1 - m^2)^2}.$$

Зависимость этого отношения от коэффициента обратной связи изображена кривой *3* на том же рисунке. Указанное отношение значительно превосходит коэффициент накопления шума одним накопителем. Это объясняется тем, что после прохождения первого накопителя шум становится уже заметно коррелированным, а поэтому во втором накопителе он накапливается по иному закону, чем в первом, и в результате этого накопления достигает значительно большего уровня.

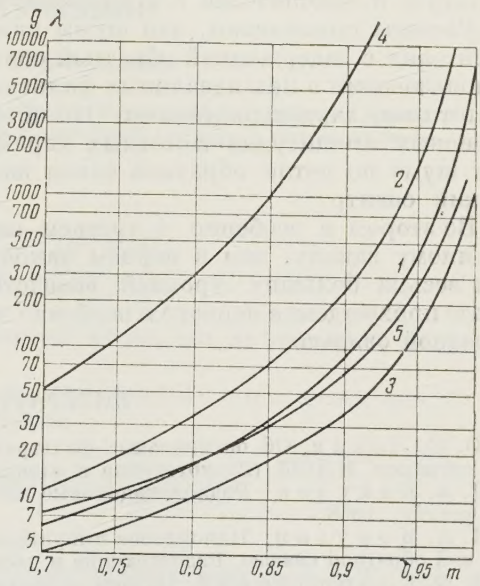



Рис. 3. Коэффициенты накопления шума двумя и тремя накопителями и отношение коэффициентов накопления шума в зависимости от величины коэффициента обратной связи

Аналогичным путем вычислим мощность шума на выходе трех последовательно включенных одинаковых накопителей с задержанной обратной связью

$$\sigma_4^2 \simeq \frac{3a\pi^2\Delta F}{64} \frac{8 + 24m^2 + 3m^4}{(1 - m^2)^{9/2}} \tag{9}$$

и коэффициент накопления шума тремя накопителями

$$g_3 = \frac{\sigma_4^2}{\sigma_4^2(m = 0)} \simeq \frac{8 + 24m^2 + 3m^4}{8(1 - m^2)^{9/2}}. \tag{10}$$

Зависимость последнего от коэффициента обратной связи представлена кривой *4* на рис. 3.

Отношение коэффициентов накопления шума тремя и двумя накопителями с задержанной обратной связью равно

$$\lambda_3 = \frac{g_3}{g_2} \simeq \frac{8 + 24m^2 + 3m^4}{4(2 + m^2)(1 - m^2)^2}$$

и как функция коэффициента обратной связи представлено кривой *5* на рис. 3.

Из рассмотрения указанных кривых можно заключить, что отношение коэффициентов накопления шума тремя и двумя накопителями и особенно коэффициент накопления шума тремя накопителями резко возрастают по мере приближения коэффициента обратной связи к единице и уже при $m = 0{,}9$ составляют соответственно 291 и 142 600, что является следствием сильной корреляции шумов, прошедших два накопителя с задержанной обратной связью. Указанная корреляция возрастает при приближении коэффициента обратной связи к единице.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом медленно меняющихся величин приближенно рассчитаны мощности шумов на выходе одного, двух и трех накопителей с задержанной обратной связью, частотная характеристика петли обратной связи которых совпадает с частотной характеристикой некорректированного усилителя на сопротивлениях в области высоких частот. Применяя описанную методику, можно провести расчеты и для накопителей с задержанной обратной связью, в которых применяются фильтры, имеющие иные частотные характеристики, а также для систем, составленных из частотных фильтров и накопителей с задержанной обратной связью.

Расчеты показывают, что шумы накапливаются в рассмотренных накопителях с задержанной обратной связью до меньшего уровня, чем при использовании в них идеальных фильтров с прямоугольными амплитудно-частотными характеристиками. Это объясняется тем, что в случае неравномерных амплитудно-частотных характеристик фильтров при циркуляции шума по петле обратной связи каждый раз сужается его энергетический спектр.

Во втором и особенно в третьем накопителях шумы накапливаются по иному закону, чем в первом накопителе, и достигают на их выходах весьма больших уровней вследствие сильной корреляции шумов после прохождения первого и особенно второго накопителей с задержанной обратной связью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Левин, Об оптимальных фильтрах для последовательностей импульсных сигналов, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1958, 1, 3, 20.
2. П. А. Бакулев, Радиолокационные методы селекции движущихся целей, Оборонгиз, 1958.
3. Л. А. Моругин, Накопление импульсных сигналов в устройствах с задержанной обратной связью, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 1885.
4. И. С. Гоноровский, Основы радиотехники, Связьиздат, 1957, стр. 498.
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951.
6. С. Гольдман, Гармонический анализ, модуляция и шумы, перев. с англ. под ред. Г. С. Горелика, ИЛ, 1951, стр. 115.
7 Communication theory, edited by W. Jackson, Butterworth scientific publications, London, 1953, p. 216—230.

Поступила в редакцию
28 III 1960
После переработки
30 IX 1960

# К ВОПРОСУ О ЛИНЕЙНОЙ КОРРЕКЦИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С КОНЕЧНОЙ ШИРИНОЙ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ

*П. Я. Нудельман*

Рассмотрен вопрос об уменьшении переходного процесса, вызванного прохождением импульса через линейную систему с конечной шириной полосы пропускания.

Рассмотрим идеальный фильтр

$$Z(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Фазовые сдвиги предполагаем равными нулю, что не уменьшит общности рассмотрения.

Если на вход такого фильтра подать импульс $\varphi(t)$, то на выходе на основании формулы Дюамеля получим

$$f(t) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega (t-\tau)}{t-\tau} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Здесь $(-T/2,\ T/2)$ — интервал длительности импульса $\varphi(t)$. Все значения $f(t)$, соответствующие моментам времени вне интервала $(-T/2,\ T/2)$, будем называть последействием.

Выясним, какова форма импульса $\varphi(t)$ длительности $T$, обладающего минимальной энергией последействия:

$$W_{\text{пд}} = W_{-\infty,\infty} - W_{-T/2,\ T/2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt - \int\limits_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\, dt \tag{3}$$

при прохождении через идеальный фильтр.

Полная энергия и энергия в интервале $(-T/2,\ T/2)$ функции $f(t)$ на выходе фильтра соответственно равны

$$W_{-\infty,\infty} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[ \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega (t-\tau)}{t-\tau} \varphi(\tau)\, d\tau \right]^2 dt =$$

$$= \int\limits_{-T/2}^{T/2} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \varphi(\tau)\, \varphi(s) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin \Omega (t-\tau)}{t-\tau} \frac{\sin \Omega (t-s)}{t-s}\, dt\, d\tau\, ds =$$

$$= \int\limits_{-T/2}^{T/2} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \varphi(\tau)\, \varphi(s) \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega (\tau - s)}{\tau - s} d\tau\, ds, \tag{4}$$

$$W_{-T/2,\ T/2} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \varphi(\tau)\, \varphi(s) \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \Omega (t-\tau)}{t-\tau} \frac{\sin \Omega (t-s)}{t-s}\, dt\, d\tau\, ds. \tag{5}$$

Для отыскания импульса, дающего минимум (3), проведем исследо-

вание функционала

$$U[\varphi] = \int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(\tau)\,\varphi(s)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\Omega(\tau-s)}{\tau-s}\,d\tau ds - \\ -\lambda\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(\tau)\,\varphi(s)\,\frac{1}{\pi^2}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{\sin\Omega(t-\tau)}{t-\tau}\,\frac{\sin\Omega(t-s)}{t-s}\,dt\,d\tau\,ds. \qquad (6)$$

Необходимо найти функцию (в дальнейшем обозначаемую $\bar{\varphi}(t)$), для которой (см., например, [1]) $\delta U[\varphi] = 0$ при наименьшем значении параметра $\lambda = \lambda_{\text{мин}}$.

Вводя произвольную функцию $\zeta(t)$ и параметр $\varepsilon$, получаем следующее уравнение для определения $\lambda_{\text{мин}}$ и $\bar{\varphi}(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}U[\bar{\varphi}(t) + \varepsilon\zeta(t)]_{\varepsilon=0} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) преобразовывается к виду

$$\int_{-T/2}^{T/2}\bar{\varphi}(\tau)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\Omega(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - \\ -\lambda\int_{-T/2}^{T/2}\bar{\varphi}(\tau)\,\frac{1}{\pi^2}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{\sin\Omega(t-s)}{t-s}\,\frac{\sin\Omega(s-t)}{s-\tau}\,ds\,d\tau = 0. \qquad (8)$$

Уравнению (8) удовлетворяют только собственные функции однородного интегрального уравнения типа Фредгольма с симметричным положительно определенным ядром:

$$\bar{\varphi}(t) = \lambda\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\Omega(t-\tau)}{t-\tau}\,\bar{\varphi}(\tau)\,d\tau \qquad (9)$$

при значениях $\lambda$, совпадающих с характеристическими числами уравнения (9).

Это уравнение получено М. С. Гуревичем [2] для импульса, несущего максимальную часть полной энергии в заданной полосе частот.

Таким образом, импульс с максимально сконцентрированным спектром (в смысле энергии) при прохождении через идеальный фильтр дает минимальное последействие (также в смысле энергии).

Отметим одно свойство $\bar{\varphi}(t)$, вытекающее из физического смысла уравнения (9), которое можно рассматривать как формулу Дюамеля [ср. с (2)]. При прохождении через систему (1) импульс $\bar{\varphi}(t)$ не меняет своей формы в интервале $(-T/2,\ T/2)$, а только уменьшает амплитуду в $\lambda_{\text{мин}}$ раз и аналитически продолжается из интервала $(-T/2,\ T/2)$ на всю ось времени $(-\infty,\ \infty)$.

Если вместо идеального фильтра рассмотреть другую узкополосную систему $K(\omega)$ с той же частотой среза $\Omega$, то, очевидно, импульс $\bar{\varphi}(t)$ нужно заменить импульсом $\psi(t)$ так, чтобы

$$\Psi(\omega)\,K(\omega) = \bar{\Phi}(\omega), \qquad (10)$$

где

$$\bar{\Phi}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2}\bar{\varphi}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt; \qquad (11)$$

$$\Psi(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2}\psi(t)\,e^{-i\omega t}\,dt. \qquad (12)$$

Иначе говоря, импульс необходимо «согласовывать» с системой так, чтобы на выходе системы получался спектр, соответствующий функции $f(t)$, наилучшим образом энергетически сконцентрированной во времени.

Сказанное можно положить в основу другого подхода к задаче. Нужно найти $F(\omega)$ — спектр на выходе системы с конечной шириной полосы пропускания, равный нулю при $|\omega| > \Omega$, такой, чтобы энергия последействия

$$W_{\text{пд}} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt - \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt \tag{13}$$

была минимальной, т. е. мы приходим к задаче, рассмотренной в [2], с той лишь разницей, что оси времени и частот поменялись местами. Здесь

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{14}$$

Вместо определения $\bar{\varphi}(t)$ мы разыскиваем его преобразование Фурье $\bar{\Phi}(\omega)$ в интервале частот $(-\Omega, \Omega)$, что, очевидно, однозначно определит $\bar{\Phi}(\omega)$ на всей оси частот, а следовательно, и $\bar{\varphi}(t)$.

Исследование на стационарность функционала

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\right]^2 dt - \lambda\int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\right]^2 dt \tag{15}$$

или, что то же,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}|F(\omega)|^2\,d\omega - \frac{\lambda}{2\pi^2}\int_{-\Omega}^{\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}\frac{\sin\frac{T}{2}(\omega-y)}{\omega-y}F(\omega)\,F(y)\,d\omega dy \tag{16}$$

приводит к уравнению

$$\bar{\Phi}(\omega) = \lambda\int_{-\Omega}^{\Omega}\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\frac{T}{2}(\omega-y)}{\omega-y}\bar{\Phi}(y)\,dy. \tag{17}$$

В соответствии со сказанным выше мы обозначили через $\bar{\Phi}(\omega)$ ту из допустимых функций $F(\omega)$, на которой функционал (15) принимает стационарное значение. Сравнивая уравнения (9) и (17), приходим к равенству

$$\bar{\varphi}\left(\frac{r}{\Omega}\right) = \alpha\bar{\Phi}\left(\frac{2r}{T}\right), \quad -\frac{T\Omega}{2} \leqslant r \leqslant \frac{T\Omega}{2}, \tag{18}$$

которое справедливо, во всяком случае, при простом характеристическом числе $\lambda_{\text{мин}}$; $\alpha$ можно определить при помощи теоремы Релея.

В работе [2] М. С. Гуревич приводит приближенное решение уравнения (9). Согласно [2], форма $\bar{\varphi}(t)$ при малых значениях $\Omega T/2$ близка к прямоугольной, при увеличении $\Omega T/2$ наблюдается значительное убывание $\bar{\varphi}(t)$ к краям интервала $(-T/2, T/2)$ и при $\frac{\Omega T}{2} > \frac{3}{2}\pi$ на графике $\bar{\varphi}(t)$ у краев интервала $(-T/2, T/2)$ появляются колебания около нулевого уровня. Для значений $\Omega T/2$ из промежутка $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ $\bar{\varphi}(t)$ близка к функции $\cos\frac{\pi}{T}t$.

Суммируя изложенное, можем сказать, что импульс $\bar{\varphi}(t)$ является максимально уплотненным по частоте. При прохождении через идеаль-

ный фильтр он превращается в функцию, максимально уплотненную во времени, повторяющую форму $\varphi(t)$ в интервале первоначальной длительности. Спектр импульса $\overline{\Phi}(\omega)$, во всяком случае при условии, что $\lambda_{min}$ — простое, связан с ним соотношением (18), т. е. двойственен ему в смысле преобразования Фурье. Система с частотой среза $\Omega$ дает на выходе максимально сконцентрированную во времени функцию, если произведение спектров импульса и системы в полосе пропускания совпадает с $\overline{\Phi}(\omega)$.

Отсюда ясно, что коррекция должна сводиться к подбору такого импульса при заданной линейной системе (или фильтра — корректора при заданном кодовом сигнале), чтобы спектр сигнала на выходе совпадал с $\overline{\Phi}(\omega)$ в полосе пропускания системы.

Отметим еще раз, что мы рассматривали только идеализированные линейные системы с бесконечным затуханием в полосе затемнения. В качестве критерия для оценки интенсивности переходного процесса была выбрана энергия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, **1**, ГИТТЛ, 1951, стр. 181.
2. М. С. Гуревич, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 3, 313.

Поступила в редакцию
7 VI 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 2

# К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ДВУХЛУЧЕВЫХ КАНАЛОВ СВЯЗИ

*Линь Хай-цюань*

Рассмотрена пропускная способность двухлучевого канала связи со случайно меняющимися параметрами (амплитудами и временами распространения) при гауссовых аддитивных шумах. Получена формула для пропускной способности рассматриваемого канала в случае нормального распределения случайных амплитуд и равномерной спектральной плотности шумов.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время много внимания уделяют исследованию теории каналов связи со случайно меняющимися параметрами. К числу этих работ относятся [1, 2] и другие.

В работе [2] исследована пропускная способность двухлучевого канала связи, часто встречающегося на практике, и получена простая формула для определения пропускной способности в случае равномерной спектральной плотности шумов. В этой работе вместо реального двухлучевого канала связи рассмотрена идеализированная модель канала, в которой амплитуды двух лучей считаются нефлуктуирующими.

Настоящая работа посвящена вычислению пропускной способности двухлучевого канала со случайными амплитудами и временами распространения.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ

Пусть $\xi(t)$ — передаваемый сигнал на входе канала, имеющий конечную среднюю мощность $P_c$ и конечную полосу частот $(0, W)$, в пределах которой условия распространения для любой из спектральных составляющих $\xi(t)$ можно считать одинаковыми. Кроме того, считается, что в канале имеет место двухлучевое распространение радиоволн.

При этих условиях сигнал $\eta(t)$ на выходе канала связи можно представить следующим образом:

$$\eta(t) = a_1(t)\,\xi[t - \tau_1(t)] + a_2(t)\,\xi[t - \tau_2(t)] + \zeta(t). \qquad (1)$$

Здесь $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ — случайные функции, не зависящие от $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ и описывающие флуктуации амплитуд и времени прихода соответствующих лучей; $\zeta(t)$ — аддитивные помехи, не зависящие от $\xi(t)$.

Как показано в работе [2], вычисление пропускной способности двухлучевого канала, описываемого выражением (1), в общем случае является сложной нелинейной задачей.

Физическая картина распространения средних и коротких радиоволн позволяет существенно упростить соотношение (1). Его можно заменить идеализированной моделью канала

$$\eta(t) = a_1\xi(t - \tau_1) + a_2\xi(t - \tau_2) + \zeta(t), \qquad (2)$$

где $a_1$ и $a_2$ — фиксированные неслучайные числа, равные квадратным корням из среднеквадратичных значений процессов $a_1(t)$ и $a_2(t)$; $\tau_1$ и $\tau_2$ — случайные величины, распределения которых совпадают с одномерными

распределениями процессов $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$. В работе [2] выведена формула для определения пропускной способности именно такой модели. Ниже рассмотрена модель, которую можно описать соотношением

$$\eta(t) = x\xi(t-\tau_1) + y\xi(t-\tau_2) + \zeta(t). \tag{3}$$

Здесь $x$, $y$ — случайные величины, распределения которых совпадают с одномерными распределениями процессов $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Такая модель дает еще большее приближение к реальному каналу связи.

Предположим, что передаваемый сигнал $\xi(t)$ представляет собой случайный стационарный процесс. Пусть аддитивный шум $\zeta(t)$ является гауссовым случайным стационарным процессом с нулевым средним значением. Обозначим среднюю мощность шумов через $P_ш$.

Пропускную способность канала (3) можно представить выражением [3]

$$C'' = \max_{\{\xi(t)\}} M\bar{I}(\xi, \eta/x, y, \tau_1, \tau_2), \tag{4}$$

где $\bar{I}(\xi, \eta/x, y, \tau_1, \tau_2)$ — скорость передачи информации; усреднение происходит по всем $x$, $y$, $\tau_1$, $\tau_2$. Если считать, что $\tau_1$ и $\tau_2$ не зависят от $x$ и $y$, то

$$C'' = \max_{\{\xi(t)\}} \iint P(x, y)\,dx\,dy \iint P(\tau_1, \tau_2)\,\bar{I}(\xi, \eta/x, y, \tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2. \tag{5}$$

Как показано в [2], при аддитивных шумах с равномерным спектром пропускная способность модели (2)

$$C'' = \max_{\{\xi(t)\}} M\bar{I}(\xi, \eta/\tau_1, \tau_2) =$$

$$= F\log\frac{1}{2}\left[1 + (a_1^2 + a_2^2)\frac{P_c}{P_ш} + \sqrt{1 + (a_1^2 - a_2^2)^2\frac{P_c^2}{P_ш^2} + 2(a_1^2 + a_2^2)\frac{P_c}{P_ш}}\right]. \tag{6}$$

Поэтому в случае модели (3)

$$C'' = \iint P(x, y) F\log\frac{1}{2}\left[1 + (x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1 + (x^2 - y)^2\frac{P_c^2}{P_ш^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш}}\right] dx\,dy =$$

$$= \frac{F}{\ln 2}\iint P(x, y)\,\Phi(x, y, P_c, P_ш)\,dx\,dy, \tag{7}$$

где

$$\Phi(x, y, P_c, P_ш) = \ln\frac{1}{2}\left[1 + (x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2\frac{P_c^2}{P_ш^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш}}\right].$$

Предположим, что $x$, $y$ — независимые случайные величины, которые распределены по нормальному закону. В этом случае

$$C'' = \frac{F}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}\Phi(x, y, P_c, P_ш)\,dx\,dy, \tag{8}$$

где $a_1$, $a_2$, $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — соответственно средние значения и дисперсии случайных величин $x$ и $y$.

Если дисперсии случайных амплитуд малы, то, раскладывая $\Phi(x, y, P_c, P_ш)$ в ряд Тейлора около $x = a_1$, $y = a_2$, получим

$$\Phi(x, y, P_с, P_ш) = \Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) + (x - a_1)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) +$$
$$+ (y - a_2)\frac{\partial}{\partial y}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) + \frac{1}{2!}\left\{(x-a_1)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) + \right.$$
$$+ 2(x - a_1)(y - a_2)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) +$$
$$\left. + (y - a_2)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш)\right\} + \ldots . \qquad (9)$$

Подставим разложение (9) в (8) и после интегрирования получим

$$C'' = \frac{F}{\ln 2}\left\{\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) + \frac{\sigma_1^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma_2^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(a_1, a_2, P_с, P_ш) + \ldots\right\}. \qquad (10)$$

Полученный ряд является приближенным выражением для пропускной способности рассматриваемого двухлучевого канала со случайно меняющимися параметрами при аддитивных шумах с равномерным спектром. Формула (10) применима в диапазонах средних и коротких волн.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. В случае, когда флуктуации отсутствуют, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, выражение для $C''$ переходит в выражение для $C'$, полученное в работе [2].

2. При малом отношении $P_с/P_ш$

$$C'' \simeq \frac{F}{\ln 2}\frac{P_с}{P_ш}(a_1^2 + a_2^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \qquad (11)$$

Это значит, что при малом отношении мощностей сигнал/шум пропускная способность двухлучевого канала имеет то же значение, что и у одно-лучевого канала с коэффициентом передачи (по мощности) $a_1^2 + a_2^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

3. Если отношение $P_с/P_ш$ велико, то

$$C'' \simeq \begin{cases} F \log a_1^2 \dfrac{P_с}{P_ш} & \text{при } a_1^2 \geqslant a_2^2, \\ F \log a_2^2 \dfrac{P_с}{P_ш} & \text{при } a_1^2 \leqslant a_2^2. \end{cases} \qquad (12)$$

Полученный результат совпадает с тем, который имеется в работе [2] для этого случая. Это очевидно, так как при большом отношении $P_с/P_ш$ и малых дисперсиях $\sigma_1$ и $\sigma_2$ флуктуации амплитуд играют ничтожную роль.

4. В случае, когда второй луч отсутствует, т. е. $a_2 = \sigma_2 = 0$, и сигнал на выходе представляется в виде $\eta(t) = x\xi(t - \tau_1) + \zeta(t)$, имеем

$$C'' \simeq \frac{F}{\ln 2}\frac{P_с}{P_ш}(a_1^2 + \sigma_1^2). \qquad (13)$$

В заключение выражаю глубокую благодарность В. И. Сифорову и Б. С. Цыбакову за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Сифоров, К теории каналов радиосвязи с многолучевым распространением, Сб. трудов Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, вып. II, 1958.
2. Б. С. Цыбаков, О пропускной способности двухлучевых каналов связи, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 7, 1116.
3. Р. Л. Добрушин, Передача информации по каналу с обратной связью, Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, 4, 395.

Поступила в редакцию
14 VII 1960

1961 № 2

# О ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ОДНОЛУЧЕВЫХ И ДВУХЛУЧЕВЫХ КАНАЛОВ СВЯЗИ ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЗАМИРАНИЯХ

*Линь Хай-цюань*

Рассмотрена[1] пропускная способность однолучевых и двухлучевых каналов связи при поляризационных замираниях. Получены формулы для определения пропускной способности таких каналов при гауссовых шумах с равномерной спектральной плотностью. Показано, что уменьшение пропускной способности однолучевого канала вследствие поляризационных замираний не превышает 14,5%.

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1] и [2] исследована пропускная способность двухлучевых каналов связи при интерференционных замираниях. Однако при радиосвязи на коротких волнах помимо интерференционных замираний имеют место и поляризационные замирания принимаемого сигнала, которые также влияют на пропускную способность коротковолновых каналов связи. Интересно поэтому вычислить пропускную способность каналов связи при поляризационных замираниях.

## 1. ОДНОЛУЧЕВОЙ КАНАЛ СВЯЗИ

Рассмотрим сначала однолучевой канал связи. Как известно, попадающий в ионосферу плоско-поляризованный луч под действием магнитного поля Земли расщепляется на два эллиптически-поляризованных луча. На пути распространения радиоволн направление вектора электрического поля каждого луча непрерывно изменяется вследствие флуктуационных изменений концентрации электронов. Изменение направления плоскости поляризации будет приводить к замираниям сигналов.

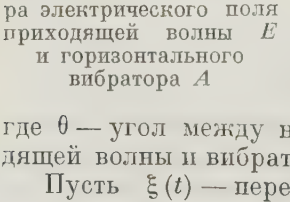



Рис. 1. Соотношение между направлениями вектора электрического поля приходящей волны $E$ и горизонтального вибратора $A$

Пусть прием сигналов ведется на горизонтальный вибратор, и направление вектора электрического поля приходящей волны относительно вибратора принимает всевозможные значения с равными вероятностями. Это математически описывается следующей формулой:

$$W(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } 0 < \theta < 2\pi, \\ 0 & \text{при } \theta < 0,\ \theta > 2\pi, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\theta$ — угол между направлением вектора электрического поля приходящей волны и вибратором (рис. 1); $W(\theta)$ — плотность вероятности угла $\theta$.

Пусть $\xi(t)$ — передаваемый сигнал со средней мощностью $P_c$ и $\eta(t)$ — принимаемый сигнал на выходе канала. Тогда

$$\eta(t) = x\xi(t-\tau) + \zeta(t), \qquad (2)$$

где $\zeta(t)$ — аддитивные помехи, среднюю мощность которых обозначим через $P_ш$; $x$ — случайная величина, характеризующая проекцию вектора электрического поля на направление вибратора.

Если через $a_1$ обозначить коэффициент передачи (по напряженности электрического поля), то в данном случае $x = a_1 \cos\theta$. Как известно, если угол $\theta$ распределен равновероятно, то плотность вероятности случайной величины $x$ имеет вид

$$P(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a_1^2 - x^2}} \quad \text{при } |x| < 1. \tag{3}$$

Для канала, работающего по схеме, заданной формулой (2), пропускная способность

$$C_n' = \int P(x) F \log\left(1 + x^2 \frac{P_c}{P_ш}\right) dx. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), получим

$$C_n' = \int_{-a_1}^{a_1} \frac{1}{\pi\sqrt{a_1^2 - x^2}} F \log\left(1 + x^2 \frac{P_c}{P_ш}\right) dx. \tag{5}$$

После интегрирования будем иметь

$$C_n' = F \log \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_1^2 P_c}{2P_ш} + \sqrt{1 + a_1^2 \frac{P_c}{P_ш}}\right). \tag{6}$$

Эта формула позволяет вычислить пропускную способность однолучевого канала при поляризационных замираниях в случае гауссовых шумов с равномерной спектральной плотностью. Из нее следует, что пропускная способность зависит от полосы частот $F$, занимаемой сигналом, и отношения мощности принимаемого сигнала к мощности помех $a_1^2 P_c / 2P_ш$ на выходе канала.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Когда мощность сигнала мала по сравнению с мощностью помех, пропускная способность рассматриваемого канала

$$C_n' \simeq F \log\left(1 + \frac{a_1^2 P_c}{2P_ш}\right). \tag{7}$$

Отсюда видно, что пропускная способность канала при поляризационных замираниях совпадает в этом случае с пропускной способностью однолучевого канала с коэффициентом передачи (по мощности) $a_1^2/2$.

2. При большом отношении $P_c/P_ш$

$$C_n' \simeq F \log a_1^2 \frac{P_c}{P_ш}. \tag{8}$$

Из этой формулы следует, что пропускная способность рассматриваемого канала совпадает с аналогичной величиной для однолучевого канала, имеющего коэффициент передачи по мощности $a_1^2$.

Теперь сравним пропускную способность $C_n'$ при наличии поляризационных замираний с пропускной способностью $C_1$ однолучевого канала в отсутствие поляризационных замираний. Среднюю мощность принимаемого сигнала на выходе канала, которую обозначим через $P_c'$, в обоих случаях принимаем одинаковой.

По формуле Шеннона

$$C_1 = F \log\left(1 + \frac{P_c'}{P_ш}\right), \tag{9}$$

где $P'_c = P_c\overline{x^2}$ (см. [1]). В данном случае величину $\overline{x^2}$, равную $a_1^2/2$, легко найти через ее плотность вероятности. Поэтому

$$C_1 = F \log \left(1 + \frac{a_1^2 P_c}{2P_ш}\right). \tag{10}$$

На рис. 2 показана зависимость отношения $C'_n/C_1$ от $P'_c/P_ш$, где $P'_c = a_1^2 P_c/2$. Нетрудно видеть, что отношение $C'_n/C_1$ при изменении $P'_c/P_ш$ от 0 до $\infty$ сначала убывает от 1 до 0,855, а затем возрастает и стремится к единице. Отсюда следует, что пропускная способность однолучевого канала вследствие поляризационных замираний уменьшается не более чем на 14,5% при любом отношении сигнал/шум.

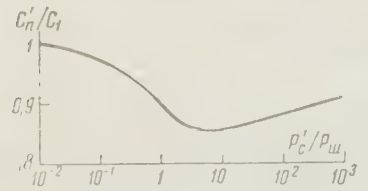



Рис. 2. Зависимость пропускной способности ($C'_n/C_1$) от отношения сигнал/шум ($P'_c/P_ш$)

## 2. ДВУХЛУЧЕВОЙ КАНАЛ СВЯЗИ

В предыдущем параграфе рассмотрена пропускная способность однолучевого канала при поляризационных замираниях. Если вследствие одно- и двухкратного отражений от ионосферы в место приема попадают два луча, в каждом из которых имеют место поляризационные замирания, то образуется двухлучевой канал с поляризационными замираниями. Исследуем пропускную способность такого канала.

Как показано в работе [2], пропускную способность двухлучевого канала со случайно изменяющимися амплитудами и фазами при белом шуме можно вычислить при помощи формулы

$$C''_n = \iint P(x, y)\, C'(x, y)\, dx\, dy,$$

где

$$C'(x, y) = F \log \frac{1}{2}\left[1 + (x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш} + \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2 \frac{P_c^2}{P_ш^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш}}\right].$$

Будем полагать величины $x$ и $y$ независимыми. Подставляя в найденную формулу для $C''_n$ выражения для их плотностей вероятностей, получим

$$C''_n = \int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_1}^{a_1} \frac{1}{\pi\sqrt{a_1^2 - x^2}} \frac{1}{\pi\sqrt{a_2^2 - y^2}} F \log \frac{1}{2}\left[1 + (x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш} + \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2 \frac{P_c^2}{P_ш^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{P_c}{P_ш}}\right] dx\, dy. \tag{11}$$

Эта формула позволяет вычислить пропускную способность двухлучевого канала, в котором имеет место магнито-ионное расщепление.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (11).

1. При малом отношении $P_c/P_ш$

$$C'_n \simeq \frac{F}{\ln 2}\frac{P_c}{P_ш}\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2). \tag{12}$$

Пропускная способность рассматриваемого канала совпадает с соответствующей величиной для исследованного Шенноном канала с коэффициентом передачи по мощности $\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$.

2. В случае, когда $a_1/a_2 \gg 1$ и $P_с/P_ш \ll 1$,

$$C_n'' \simeq F \log \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_1^2 P_с}{2P_ш} + \sqrt{1 + a_1^2 \frac{P_с}{P_ш}}\right) + \frac{F}{\ln 2}\frac{P_с}{P_ш}\frac{a_2^2}{2}. \qquad (13)$$

В предельном случае при $a_2 \to 0$ величина $C_n''$ переходит в $C_n'$ (формула (6)), чего и следовало ожидать.

3. При большом отношении $P_с/P_ш$

$$C_n'' \simeq \begin{cases} F \log a_1^2 \dfrac{P_с}{P_ш} & \text{при } a_1^2 > a_2^2, \\ F \log a_2^2 \dfrac{P_с}{P_ш} & \text{при } a_1^2 < a_2^2. \end{cases} \qquad (14)$$

Из формулы (14) и соответствующих формул работ [1] и [2] для этого случая следует, что при большом отношении мощностей сигнал/шум пропускная способность не зависит от того, флуктуируют ли амплитуды сигналов или нет.

В заключение приношу глубокую благодарность В. И. Сифорову и Б. С. Цыбакову за постоянное внимание к работе и помощь.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Цыбаков, О пропускной способности двухлучевых каналов связи, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 7, 1116.
2. Линь Хай цюань, К вычислению пропускной способности двухлучевых каналов связи, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 2, 197.

Поступила в редакцию
14 VII 1960

1961 № 2

# МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И ЕГО СВЯЗЬ СО СТРОГИМ ДИФРАКЦИОННЫМ МЕТОДОМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ

*А. В. Шабельников*

Строгое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре разложено в ряд по степеням малого параметра $\alpha = \Delta n k_0 a$. Установлено, что решение, полученное методом возмущений, тождественно первому члену разложения. Проведена оценка границы применимости метода возмущений. Методом возмущений решена задача о рассеянии плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре с постоянным и переменным $\varepsilon$, причем решение с переменным $\varepsilon$ при некоторых условиях, налагаемых на вид функции $\varepsilon(r)$, тождественно решению, получающемуся при рассеянии радиоволн на статистических неоднородностях тропосферы.

## ВВЕДЕНИЕ

При решении задач некогерентного рассеяния радиоволн на неоднородностях тропосферы обычно применяется метод возмущений [1—4]. Он привлекает своей простотой и позволяет рассчитывать рассеянное поле от объемов любой формы с любой зависимостью диэлектрической проницаемости от координат. Однако этот метод является приближенным и поэтому может применяться только при определенных условиях.

Целью настоящей работы является нахождение связи метода возмущений со строгим дифракционным методом и установление границ применимости метода возмущений. Для этого строгое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на шаре разложено в ряд по степеням $\alpha = \Delta n k_0 a$ и установлено, что решение, полученное методом возмущений, тождественно первому члену разложения.

В заключение методом возмущений решена задача о рассеянии плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре с постоянным и переменным $\varepsilon$. Решение с постоянным $\varepsilon$ тождественно строгому решению дифракции плоской электромагнитной волны на шаре, полученному Иобстом [5] при тех же предположениях, при которых справедлив метод возмущений.

Решение с переменным $\varepsilon(r)$, где $r$ — расстояние от начала координат до переизлучающей точки шара при соответствующем выборе функции $\varepsilon(r)$, тождественно решению, получающемуся при рассеянии радиоволн на статистических неоднородностях тропосферы с использованием функции корреляции $R(r)$.

## 1. СВЯЗЬ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ СО СТРОГИМ ДИФРАКЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в среде, диэлектрическая проницаемость которой является функцией координат. Уравнение, которому удовлетворяет электрический вектор $\vec{E}$, в этом случае будет [2]

$$\Delta\vec{E} + k_0^2\varepsilon\vec{E} = +\frac{4\pi}{c}\vec{J}\,ik_0, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + S\Delta\varepsilon; \quad S \ll 1; \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \varepsilon_2 = \text{const}; \tag{2}$$

$J$ — плотность тока в антенне; $\Delta\varepsilon$ в общем случае — функция координат. Подставив (2) в (1), получим неоднородное волновое уравнение

$$\Delta\vec{E} + k_0^2\varepsilon_2\vec{E} = -\Delta\varepsilon S k_0^2\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}ik_0, \tag{3}$$

решение которого можно представить следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0^*(\vec{r}_0) - S\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\int_V \Delta\varepsilon k_0^2\vec{E}(\vec{r})\frac{e^{ik_2R}}{R}dV, \tag{4}$$

где $\vec{r}_0$ — векторная координата точки наблюдения; $\vec{E}_0^*(\vec{r}_0)$ — поле, создаваемое передающей антенной в точке наблюдения при однородной атмосфере; $V$ — переизлучающий объем; $R$ — расстояние между точкой наблюдения и переменной точкой переизлучения в объеме $V$ (рис., стр. 209), $k_0$ — волновое число в однородной среде.

Применим для решения интегрального уравнения метод последовательных приближений [6], для чего будем искать решение уравнения (4) в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням $S$:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + S\vec{E}_1(\vec{r}_0) + S^2\vec{E}_2(\vec{r}_0) + \ldots + S^p\vec{E}_p(\vec{r}_0) + \ldots. \tag{5}$$

Подставляя ряд (5) в уравнение (4), интегрируя почленно и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $S$ в обеих частях полученного равенства, получим формулы для последовательного определения $\vec{E}_p(\vec{r}_0)$:

$$\vec{E}_0(\vec{r}_0) = \vec{E}_0^*(\vec{r}_0), \tag{6}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\int_V \Delta\varepsilon k_2^2\vec{E}_0(\vec{r})\frac{e^{ik_2R}}{R}dV, \tag{7}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\int_V \Delta\varepsilon k_2^2\vec{E}_1(\vec{r})\frac{e^{ik_2R}}{R}dV_1, \tag{8}$$

. . . . . .

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\int_V \Delta\varepsilon k_2^2\vec{E}_{p-1}(\vec{r})\frac{e^{ik_2R}}{R}dV, \tag{9}$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\xi};$$

$\cos\xi = \cos\Theta\cos\Theta_0 + \sin\Theta\sin\Theta_0\cdot\cos(\varphi - \varphi_0)$; $r$, $\Theta$, $\varphi$ и $r_0$, $\Theta_0$, $\varphi_0$ — координаты точки переизлучения и точки наблюдения в сферической системе координат.

Заметим, что выражение (7) представляет собой классическое выражение для рассеянного поля, которое обычно получается во всех теориях рассеяния при использовании метода возмущений. Для установления связи между методом возмущений и строгим дифракционным методом необходимо точно вычислить интеграл (7), причем в этом случае $\Delta\varepsilon = \text{const}$.

Обычно в теории рассеяния для вычисления интегралов подобного вида разлагают величину $R$ в ряд, пользуясь тем, что поле вычисляется в волновой зоне. Нам же для оценки метода возмущений необходимо знать значение интеграла вблизи объема рассеяния, т. е. в точках, где $r_0$ порядка или даже меньше $r$.

В этом случае разложение в ряд величины $R$ не имеет смысла и поэтому необходимо найти способ, позволяющий точно вычислить интеграл вида (7).

Итак, нам необходимо вычислить интеграл

$$\vec{E}_1 = \frac{\Delta\varepsilon k_0^2}{4\pi}\vec{E}_0\int\limits_V e^{ik_2 r\cos\Theta}\frac{e^{ik_2 R}}{R}\,dV, \tag{10}$$

где $\vec{E}_0$ – амплитуда плоской волны. Для этого разложим подынтегральную функцию в ряд по функциям Бесселя и полиномам Лежандра [7]

$$\vec{E}_1 = \frac{\Delta\varepsilon k_0^2}{4\pi}\vec{E}_0\int\limits_V \left\{\sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1)\,\Psi_n(k_2 r)\,P_n(\cos\Theta)\right\}\times$$

$$\times\left\{ik_2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\Psi_n(k_2 r)\,h_n^{(1)}(k_2 r_0)\,P_n(\cos\xi)\right\}dV, \tag{11}$$

где

$$\Psi_n(k_2 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r);$$

$$h_n^{(1)}(k_2 r_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r),$$

а функцию $P_n(\cos\xi)$ согласно теореме сложения [8] можно представить в виде ряда

$$P_n(\cos\xi) = P_n(\cos\Theta)\,P_n(\cos\Theta_0) +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(\cos\Theta)\,P_n^m(\cos\Theta_0)\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и производя последовательное интегрирование по $\varphi$, $\Theta$ и $r$, получим окончательное выражение для радиальной составляющей рассеянного поля:

$$E_{1r} = \frac{\pi\Delta n k_0 a^2}{2r_0}E_0\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)\,h_n^{(1)}(k_2 r_0)\,P_n^1(\cos\Theta_0)\cos\varphi_0\times$$

$$\times\left\{J^2_{n+\frac{1}{2}}(k_2 a) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 a)\,J_{n+\frac{3}{2}}(k_2 a)\right\}, \tag{13}$$

где $E_0$ — амплитуда волны, падающей на диэлектрический объем $V$; $a$ — радиус диэлектрического шара; $k_2$ — волновое число среды.

Теперь рассмотрим строгое решение дифракции плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре радиуса $a$. Радиальную составляющую рассеянного поля вне шара представим следующим образом [10]:

$$E_{1r} = -\frac{E_0}{k_2 r_0}\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(2n+1)\,b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r_0)\,P_n^1(\cos\Theta_0)\cos\varphi_0, \tag{14}$$

где

$$b_n^r = -\frac{\Psi_n(y)\,[x\Psi_n(x)]' - \frac{x^2}{y^2}\Psi_n(x)\,[y\Psi_n(y)]'}{h_n^{(1)}(y)\,[x\Psi_n(x)]' - \frac{x^2}{y^2}\Psi_n(x)\,[yh_n^{(1)}(y)]'}; \tag{15}$$

$$x = N\rho;\quad y = \rho;\quad N = \frac{x}{y};\quad \rho = k_2 a;$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу; $x - y = \alpha = \Delta n k_0 a$; $\Delta n = n_1 - n_2$; $n_2$ — показатель преломления среды; $n_1$ — показатель преломления шара.

Обозначим

$$A_n(x) = \frac{[x\Psi_n(x)]'}{x^2\Psi_n(x)}.$$

тогда равенство (15) перепишется следующим образом:

$$b_n^r = \beta_n(x) = \frac{[y\Psi_n(y)]' - A_n(x)\, y^2\Psi_n(y)}{[yh_n^{(1)}(y)]' - A_n(x)\, y^2 h_n^{(1)}(y)}. \qquad (16)$$

Поскольку $x = y + \alpha$, функцию $\beta_n(y+\alpha)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$\beta_n(y+\alpha) = \beta_n(y) + \frac{\alpha}{1!}\beta_n'(y) + \ldots + \frac{\alpha^q}{q!}\beta_n^{(q)}(y+\gamma\alpha), \qquad (17)$$

где $\gamma$ — некоторое число, заключенное между 0 и 1.

Вычисления показывают, что

$$\beta_n(y) = 0,$$
$$\beta_n'(y) = -i\{y^2[\Psi_n(y)\Psi_n''(y) - (\Psi_n'(y))^2] - 2[\Psi_n(y)]^2 - y\Psi_n(y)\Psi_n'(y)\}. \qquad (18)$$

После соответствующих преобразований равенство (14) в первом приближении получит вид

$$E_{1r} = \frac{\pi\Delta n k_0 a^2}{2r_0} E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k_2 r_0) P_n^1(\cos\Theta_0)\cos\varphi_0 \times$$
$$\times \left\{ J^2_{n+\frac{1}{2}}(k_2 a) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 a) J_{n+\frac{3}{2}}(k_2 a) \right\}. \qquad (19)$$

Сравнение равенств (13) и (19) показывает их полную тождественность, что дает возможность сделать следующий важный вывод. Обычно применяемое в теории некогерентного рассеяния выражение для рассеянного поля (10) представляет собой первый член разложения строгого решения дифракционной задачи в ряд по степеням $\alpha = \Delta n k_0 a$. Вычисления интегралов (8), (9) и т. д. вышеизложенным способом позволили установить следующие тождества:

$$E_{2r} = -\frac{E_0}{k_2 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(2n+1)\frac{\alpha^2}{2!}\beta_n''(y) h_n^{(1)}(k_2 r_0) P_n^1(\cos\Theta_0)\cos\varphi_0, \qquad (20)$$

. . . . . .

$$E_{pr} = -\frac{E_0}{k_2 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(2n+1)\frac{\alpha^p}{p!}\beta_n^{(p)}(y) h_n^{(1)}(k_2 r_0) P_n^1(\cos\Theta_0)\cos\varphi_0. \qquad (21)$$

Равенства (19), (20) и (21) показывают, что ряд (5) является точным решением поставленной задачи, причем быстрота сходимости этого ряда обусловлена быстротой сходимости ряда (17). Ряд (17) позволяет установить границы применимости метода возмущений. Для этого необходимо выполнение следующего неравенства:

$$\frac{\alpha^2}{2}\beta_n''(y+\gamma\alpha) \ll \alpha\beta_n'(y) \qquad (22)$$

или

$$\frac{\alpha}{2}\frac{\beta_n''(y+\gamma\alpha)}{\beta_n'(y)} \ll 1. \qquad (23)$$

Оценка величины $A_1 = |\beta_n''(y+\gamma\alpha)/\beta_n'(y)|$ показывает, что она не превышает единицы при любых значениях аргумента. Это значит, что неравенство (23)

можно переписать следующим образом:

$$\frac{\Delta n k_0 a}{2} \ll 1. \tag{24}$$

Неравенство (24) определяет границы применимости метода возмущений. К подобному же неравенству приходит и Чернов [9], рассматривая методом возмущений рассеяние звуковых волн на флуктуациях плотности и скорости среды.

Оценим число членов ряда (5), которое необходимо взять, чтобы получить решение интегрального уравнения (4) с ошибкой, не превышающей заданной величины $\mu_n$. Оно будет определяться из следующего равенства:

$$\frac{\alpha^p}{p!}\beta_n^{(p)}(y+\gamma\alpha) = \mu_n. \tag{25}$$

Методику установления границ применимости метода возмущений можно легко распространить на диэлектрические объемы любой формы. Для этого рассмотрим произвольный объем $V'$ с диэлектрической проницаемостью, отличающейся на $\Delta\varepsilon$ от окружающей среды. Опишем вокруг этого объема сферу радиуса $a$, где $2a$ — расстояние между двумя наиболее удаленными точками объема $V'$. Объем сферы $V$ равен

$$V = V' + V'', \tag{26}$$

где $V''$ — объем, дополняющий $V'$ до объема сферы. Из равенства (26) следует, что

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\int\limits_{V'} \Delta\varepsilon k_2^2 \vec{E}_0(\vec{r})\frac{e^{ik_2R}}{R}\,dV \leqslant \vec{E}_1(\vec{r}_0), \tag{27}$$

т. е. для объема $V'$ также справедливо условие (24).

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ШАРЕ С ПОСТОЯННЫМ И ПЕРЕМЕННЫМ $\varepsilon$

А. Продемонстрируем преимущество метода возмущений перед строгим дифракционным методом на задаче рассеяния плоской электромагнитной волны диэлектрическим шаром с постоянным $\varepsilon$. Применяемые в этом случае координатные системы и геометрические соотношения приведены на рисунке.

В § 1 показано, что в первом приближении рассеянное шаром поле можно представить следующим образом:

$$\vec{E}_1 = \frac{\Delta\varepsilon k_0^2}{4\pi}\int\limits_V \vec{E}^0(\vec{r})\frac{e^{ik_2R}}{R}\,dV, \tag{28}$$

где $\vec{E}_0(\vec{r})$ — падающая плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси $z$:

$$\vec{E}^0(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{ik_2 z}. \tag{29}$$

Подставляя (29) в уравнение (28), рассеянное шаром поле можно выразить следующим образом:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_0) = \Delta\varepsilon k_0^2 \vec{E}_0 L, \tag{30}$$

где

$$L = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{e^{ik_2(z+R)}}{R}\,dV. \tag{31}$$

Займемся вычислением интеграла $L$ в сферической системе координат. Будем считать, что размеры шара много меньше расстояния до точки

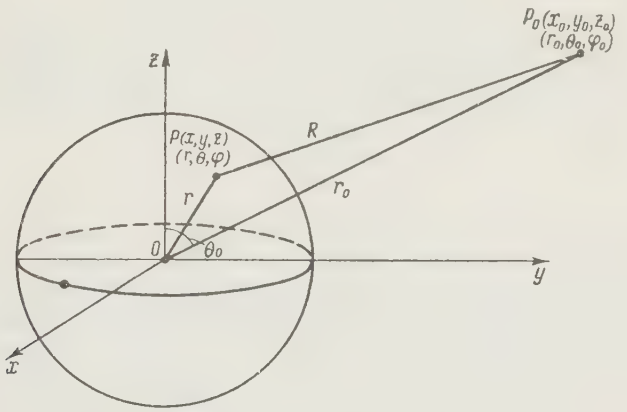
наблюдения ($a \ll r_0$), т. е. будем рассматривать поле в волновой зоне шара. В этом случае интеграл (31) можно переписать так:

$$L = \frac{e^{ik_2 r_0}}{4\pi r_0} \int_V e^{-ik_2 \left[\frac{x_0}{r_0} x + \frac{y_0}{r_0} y - \left(1 - \frac{z_0}{r_0}\right) z\right]} dV, \tag{32}$$

или в сферических координатах

$$L = \frac{e^{ik_2 r_0}}{4\pi r_0} \int_V e^{i k_2 2r \sin \frac{\Theta_0}{2} \cos \xi} dV, \tag{33}$$

где $\cos \xi$ есть косинус угла между направлениями $\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\Theta_0}{2}\right)$, $\varphi_0$ и $\Theta, \varphi$.




Геометрические соотношения при рассеянии радиоволн на диэлектрической сфере

Обозначая $2 \sin \frac{\Theta_0}{2}$ через $b$ и учитывая, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} e^{ibk_2 r \cos \xi} d\varphi = j_0 (bk_2 r),$$

$$j_0 (bk_2 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2bk_2 r}} J_{\frac{1}{2}} (bk_2 r);$$

$$J_{\frac{1}{2}} (bk_2 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi bk_2 r}} \sin bk_2 r,$$

интеграл (33) можно окончательно записать в таком виде:

$$L = \frac{e^{ik_2 r_0}}{r_0} \int_0^a \frac{\sin bk_2 r}{bk_2} r dr, \tag{34}$$

где $a$ — радиус шара.

После интегрирования выражения (34) получаем

$$L = \frac{e^{ik_2 r_0}}{r_0} \left[ \left( \frac{\sin bk_2 a}{bk_2 a} - \cos bk_2 a \right) \frac{a}{b^2 k_2^2} \right]. \tag{35}$$

Магнитный вектор рассеянного поля выражается через электрический

следующим образом:

$$\vec{H}_1 = \Delta\varepsilon k_0^2 L \sqrt{\varepsilon_2}\,[\vec{r}^*\vec{E}_0], \tag{36}$$

где $\vec{r}^*$ — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения.

Мощность, рассеянная шаром в направлении точки наблюдения на единицу телесного угла, равна [10]

$$P_\Omega = S_{\vec{r}^*} r_0^2 \tag{37}$$

где $S_{\vec{r}^*}$ — проекция вектора $\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{E}_1\vec{H}_1^*]$ на направление $\vec{r}^*$, а полная мощность, рассеянная шаром по всем направлениям,

$$P_s = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_\Omega \sin\Theta d\Theta d\varphi. \tag{38}$$

Определим поперечное сечение рассеяния $Q_s$ как отношение полной энергии, рассеянной за секунду, к плотности потока энергии падающей волны, т. е.

$$Q_s = \frac{P_s}{S_z}, \tag{39}$$

где $S_z = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_2}\,E_0^2$. Подставляя в (38) соответствующие выражения для $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$ из (30) и (36) и производя интегрирование по углам $\Theta$ и $\varphi$, для поперечного сечения рассеяния получим окончательно

$$Q_s = 2\pi a^4 k_2^2 \Delta\varepsilon^2 \left[-\frac{1}{4(2k_2a)^2} - \frac{1}{8(2k_2a)^4} + \frac{\sin 4k_2a}{4(2k_2a)^3} + \frac{\cos 4k_2a}{8(2k_2a)^4} + \frac{1}{4}\right]. \tag{40}$$

Рассмотрим два крайних случая:

$$ak_2 \ll 1, \tag{41а}$$

$$ak_2 \gg 1. \tag{41б}$$

Случай (41а) соответствует релеевскому рассеянию, случай (41б) — рассеянию, которое имеет место при дальнем тропосферном распространении УКВ ($a$ — порядка десятков метров, $\lambda$ — порядка десятков сантиметров).

При $ak_2 \ll 1$ синус и косинус, стоящие в квадратных скобках выражения (40), можно разложить в ряд по степеням $4\,k_2a$ и ограничиться четырьмя первыми членами разложения. После соответствующих преобразований равенство (40) перепишется так:

$$Q_s = \pi a^2 \Delta\varepsilon^2 \frac{8}{27}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4. \tag{42}$$

Получилась хорошо известная релеевская формула для рассеяния электромагнитных волн на малых частицах.

При $ak_2 \gg 1$ первыми четырьмя членами, стоящими в квадратных скобках (40), можно пренебречь и учитывать только последний член. В этом случае выражение (40) примет вид

$$Q_s = \pi a^2 \Delta\varepsilon^2 \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2. \tag{43}$$

Используя для поперечного сечения рассеяния выражение в виде ряда, которое получается обычным дифракционным методом, Иобст [5] нашел замкнутые формулы для поперечного сечения рассеяния:

$$Q_s = \frac{8}{27}\,\pi a^2 \Delta\varepsilon^2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \tag{44}$$

при условии

$$\rho\Delta\varepsilon \ll \rho \ll 1 \tag{45}$$

и

$$Q_s = \frac{1}{2}\pi a^2 \Delta\varepsilon^2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \tag{46}$$

при условии

$$\rho\Delta\varepsilon \ll 1 \ll \rho, \tag{47}$$

где $\rho = 2\pi a/\lambda$, причем неравенства (45) и (47) эквивалентны условию (24). Сравнение формул (42) и (43) с формулами (44) и (46) показывает их полную тождественность, что дает основание сделать следующий вывод: метод возмущений, обладая большой наглядностью и математической простотой, при выполнении условия (24) дает решения, совпадающие с решениями, полученными строгим дифракционным методом.

В. Рассмотрим ту же задачу, что и в разделе А, но теперь будем считать диэлектрическую проницаемость шара зависящей от $r$. На основании формулы (28) выражение для электрического вектора будет иметь следующий вид:

$$\vec{E}_1 = k_0^2 \vec{E}_0 \frac{e^{ik_2 r_0}}{r_0} L_1, \tag{48}$$

где

$$L_1 = \int_0^a \varepsilon(r) \sin(bk_2 r)\, r dr. \tag{49}$$

Подставляя в (49) различные функции $\varepsilon(r)$, получим разные зависимости $\vec{E}_1$ от $a$, $\lambda$ и $\Theta$. Для примера рассмотрим распространенную в теории рассеяния зависимость

$$\varepsilon(r) = \Delta\varepsilon e^{-\frac{r}{l}}, \tag{50}$$

где

$$l \ll a \tag{51}$$

— некоторый параметр, имеющий в теории рассеяния смысл радиуса корреляции. Подставив (50) в (49) и произведя интегрирование с учетом неравенства (51), получим следующие выражения для $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$:

$$\vec{E}_1 = \frac{2\Delta\varepsilon k_0^2 l^3}{(1+b^2k_2^2l^2)^2} \frac{e^{ik_2 r_0}}{r_0} \vec{E}_0, \tag{52}$$

$$\vec{H}_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \frac{2\Delta\varepsilon k_0^2 l^3}{(1+b^2k_2^2l^2)^2} \frac{e^{ik_2 r_0}}{r_0} [\vec{r}^* \vec{E}_0], \tag{53}$$

где $\sqrt{\varepsilon_2}$ — средняя характеристическая проводимость среды. Мощность, рассеянная шаром в направлении точки наблюдения на единицу телесного угла,— это действительная часть $\frac{1}{2}[\vec{E}_1 \vec{H}_1^*]$, умноженная на $r_0^2$. Тогда поперечное сечение рассеяния $Q_s$ выразится формулой

$$Q_s = \frac{2\pi\Delta\varepsilon^2 k_0^4 l^4}{3k_2^2} \left\{1 - \frac{1}{(1+4k_2^2l^2)^3}\right\}. \tag{54}$$

Частные случаи:

1) $k_2 l \ll 1$,

$$Q_s = 8\pi l^2 \Delta\varepsilon^2 \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^4, \tag{55}$$

2) $k_2 l \gg 1$,

$$Q_s = \frac{2\pi}{3\varepsilon_2} l^2 \Delta\varepsilon^2 \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2. \tag{56}$$

Из формул (55) и (56) следует, что рассеяние на диэлектрической сфере радиуса $a$ с переменным $\varepsilon$ при условии (50) можно рассматривать как рассеяние на сфере радиуса $l$ с постоянным $\varepsilon$.

### 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ КОРРЕЛЯЦИИ $R(r)$, ПРИМЕНЯЕМОЙ В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ, И ФУНКЦИЕЙ $\varepsilon(r)$

Представляет интерес нахождение такой зависимости диэлектрической проницаемости шара $\varepsilon(r)$, при которой в точке приема создается поле, равное полю при рассеянии радиоволн на случайных неоднородностях тропосферы.

Комплексная плотность мощности у приемника, обусловленная рассеянием в объеме $V$, будет [11]

$$\frac{1}{2}[\vec{E}_1\vec{H}_1]\vec{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_2}E_0^2\left\{\frac{k_0\sin\chi}{4\pi r_0}\right\}^2 4\pi\frac{V\overline{\Delta\varepsilon^2}}{bk_2}\int_0^r R(r)\sin(bk_2r)\,rdr, \qquad (57)$$

где $R(r)$ — функция корреляции диэлектрической проницаемости воздуха; $V$ — объем рассеяния. Плотность же мощности, обусловленная рассеянием плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре с переменным $\varepsilon(r)$, равна

$$\frac{1}{2}[\vec{E}_1\vec{H}_1]\vec{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_2}E_0^2\left\{\frac{k_0^2\sin\chi}{r_0}\right\}^2\frac{\Delta\varepsilon^2}{b^2k_2^2}\left[\int_0^r\varepsilon(r)\sin(bk_2r)\,rdr\right]^2. \qquad (58)$$

Приравнивая равенства (57) и (58), получаем следующее уравнение для нахождения связи между $R(r)$ и $\varepsilon(r)$:

$$\frac{bk_2V}{4\pi}\int_0^r R(r)\sin(bk_2r)\,rdr = \left[\int_0^r\varepsilon(r)\sin(bk_2r)\,rdr\right]^2. \qquad (59)$$

Извлекая квадратные корни и дифференцируя равенство (59) по $r$, получим следующее соотношение между $\varepsilon(r)$ и функцией корреляции $R(r)$:

$$\varepsilon(r) = R(r)\sqrt{\frac{bk_2V}{16\pi\int_0^r R(r)\sin(bk_2r)\,rdr}}. \qquad (60)$$

Из формулы (60) можно сделать следующий интересный вывод.

Рассеяние радиоволн на статистических неоднородностях тропосферы можно рассматривать как рассеяние на шаре, диэлектрическая проницаемость которого равна в центре $\sqrt{\overline{\Delta\varepsilon^2}}$ и убывает к краям по закону (60), а его размеры соответствуют размеру масштаба корреляции $l$. В частном случае, когда $\varepsilon(r)$ выражается формулой (50), рассеяние радиоволн на статистических неоднородностях тропосферы можно свести к рассеянию на шаре радиуса $l$ с постоянной диэлектрической проницаемостью [11]. Иными словами, задача рассеяния радиоволн на статистических неоднородностях тропосферы может быть сведена к задаче рассеяния радиоволн на шаре, диэлектрическая проницаемость которого является регулярной функцией, связанной с функцией корреляции соотношением (60).

В заключение автор выражает благодарность Б. А. Введенскому, А. В. Соколову и Н. А. Арманду за просмотр и обсуждение настоящей работы и высказанные при этом полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S t a r a s, J. Appl. Phys., 1952, **23**, 10, 1152.
2. A. D. W h e e l o n, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10, 1459.
3. G. E c k a r t, Compt. rend., 1957, **244**, 25, 3044.
4. D. G. P a u l, IRE Trans., 1958 **AP-6**, 1, 61.
5. G. J o b s t, Ann. Physik, 1925, **78**, 18, 157.
6. В. И. С м и р н о в, Курс высшей математики, IV, ГИТТЛ, 1957.
7. Г. Н. В а т с о н, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, 1949.
8. Е. В. Г о б с о н, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
9. Л. А. Ч е р н о в, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд. АН СССР, 1958.
0. Д. А. С т р э т т о н, Теория электромагнетизма, ГТИ, 1948.
1. H. G. B o o k e r, W. E. C o r d o n, Proc. I. R. E., 1950, **38**, 4, 401.

Поступила в редакцию
14 XII 1959

1961 № 2

# ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ АПЛАНАТИЧЕСКИХ АНТЕНН

*И. Г. Пономарев*

Описан простой графический способ построения зеркальных и линзовых антенн, удовлетворяющих условию синусов Аббе. Способ основан на методах геометрической оптики и аналогичен известному способу построения зеркал с диаграммой специальной формы. Приведены результаты экспериментального исследования макета двухзеркальной апланатической антенны.

В антенной технике находят применение как зеркальные, так и линзовые антенны, качание луча которых осуществляется перемещением первичного источника излучения по некоторой кривой. Как известно, неискаженное качание луча возможно при выполнении «условия синусов», которое обеспечивает в оптике неискаженное изображение предметов конечной протяженности. По аналогии с оптическими системами, антенны, в которых выполняется условие синусов, называют апланатическими.

Зеркальные и линзовые системы, в которых выполняется условие синусов, имеют две отражающие (преломляющие) поверхности, так как наряду с условием синусов они должны удовлетворять «условию синфазности», обеспечивающему преобразование гомоцентрического пучка лучей в параллельный.

Уравнения кривых центрального сечения зеркальной апланатической системы известны [1], но они сложны и расчет по ним весьма трудоемок. Профили апланатической двупреломляющей линзы можно построить в результате интегрирования дифференциального уравнения [2]. Однако аналитическое решение этого уравнения неизвестно.

Ниже изложен простой графический способ построения как зеркальной, так и линзовой апланатических систем. Он основан на методах геометрической оптики и аналогичен способу построения кривой центрального сечения зеркала по заданным диаграммам первичного источника и зеркала [3].

Для того чтобы обеспечить условие синфазности, необходимо чтобы все выходящие из антенны лучи были параллельны ее оси. Условие синусов выполняется, если все падающие из фокуса и соответствующие им выходящие лучи пересекаются на окружности, центр которой лежит в фокусе системы [4]. Радиус этой окружности будем называть фокусным расстоянием.

Для построения профилей зеркальной системы, удовлетворяющей обоим условиям, проведем окружность радиуса $f$ с центром в начале координат (см. рис. 1). Примем начало координат за фокус, а прямую $Fx$ — за ось системы. Строим систему падающих из фокуса и соответствующих им выходящих лучей, параллельных оси и пересекающихся с падающими на указанной окружности. На крайнем падающем и соответствующем ему выходящем лучах выбираем произвольные точки $A$ и $B$ и соединяем их прямой линией. Эти точки являются крайними точками профилей зеркальной системы *. Выбирая точки $A$ и $B$, как указано на рис. 1, и соединяя

* В выборе исходных точек $A$ и $B$ имеется достаточный произвол. Нетрудно убедиться в том, что обе точки можно располагать как внутри круга радиуса $f$, так и вне его, а также одну из них ($A$ или $B$) внутри и другую вне круга. Тот или иной выбор исходных точек определяет форму профилей зеркал и их взаимное расположение.

их прямой, мы тем самым задаем траекторию крайнего луча. Для того чтобы луч имел форму ломаной $FABD$, касательные к поверхностям зеркал в точках $A$ и $B$ должны быть перпендикулярны биссектрисам углов $\alpha$ и $\beta$ (см. рис. 1). Строя эти касательные, находим положение элементарных плоских отражателей в данных точках. Продолжая касательные к профилям зеркал в точках $A$ и $B$ до пересечения в точках $A_1$ и $B_1$ со следующими падающим из фокуса и соответствующим выходящим лучами и соединяя прямой точки $A_1$ и $B_1$, получим траекторию соседнего луча. Строя в точках $A_1$ и $B_1$ отрезки прямых линий, нормали к которым совпадают с биссектрисами углов $\alpha_1$ и $\beta_1$, получим следующие элементы профилей зеркал. Для получения последующих элементов профилей построение продолжается таким же образом.

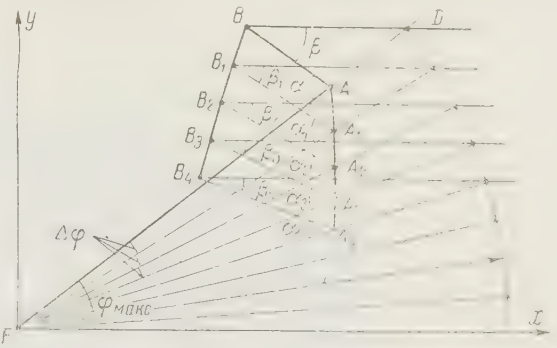



Рис. 1. Построение профилей двухзеркальной апланатической антенны

В результате построения получаем ломаные $AA_1A_2A_3\ldots A_n$ и $BB_1B_2B_3\ldots B_n$, аппроксимирующие профили зеркал системы, удовлетворяющей как условию синфазности, так и условию синусов. Очевидно, аппроксимация будет тем точнее, чем меньше углы $\Delta\varphi$. Точность графического построения можно повысить и другим путем, например, способом, применяемым при расчете линз с заданным амплитудно-фазовым распределением в раскрыве [5]. Так как система симметрична относительно фокальной оси, то можно ограничиться построением профилей только по одну сторону от оси. Вторая половина получается зеркальным отображением относительно оси.

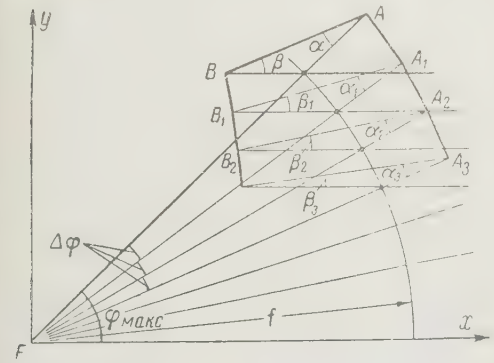



Рис. 2. Построение профилей двухзеркальной апланатической системы (точка $A$ лежит вне круга радиуса $f$, а точка $B$ — внутри круга)

На рис. 2 показано построение профилей двухзеркальной системы для случая, когда точка $A$ лежит вне круга радиуса $f$, а $B$ — внутри него.

Исходя из графического построения, можно получить рекуррентные формулы, выражающие координаты точек $A_k$ и $B_k$ через координаты точек $A_{k-1}$ и $B_{k-1}$. Для двухзеркальной системы эти формулы имеют вид

$$x_{A_k} = x_{A_{k-1}} \frac{\operatorname{tg}[\varphi_{\text{макс}} - (k-1)\Delta\varphi] + \operatorname{ctg}\left[\dfrac{\varphi_{\text{макс}} - (k-1)\Delta\varphi + \beta_{k-1}}{2}\right]}{\operatorname{tg}[\varphi_{\text{макс}} - k\Delta\varphi] + \operatorname{ctg}\left[\dfrac{\varphi_{\text{макс}} - (k-1)\Delta\varphi + \beta_{k-1}}{2}\right]}, \quad (1)$$

$$y_{A_k} = x_{A_k} \operatorname{tg}(\varphi_{\text{макс}} - k\Delta\varphi), \quad (2)$$

$$x_{B_k} = x_{B_{k-1}} + 2f \operatorname{tg}\frac{\beta_{k-1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left[\varphi_{\text{макс}} - \frac{(2k-1)\Delta\varphi}{2}\right], \quad (3)$$

$$y_{B_k} = f \sin(\varphi_{\text{макс}} - k\Delta\varphi), \quad (4)$$

где

$$\operatorname{tg}\beta_{k-1} = \frac{y_{B_{k-1}} - y_{A_{k-1}}}{x_{B_{k-1}} - x_{A_{k-1}}}; \qquad (5)$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

При выводе формул (1) —(5) предполагалось, что $\varphi_{\text{макс}}$ делится на одинаковые углы $\Delta\varphi$.

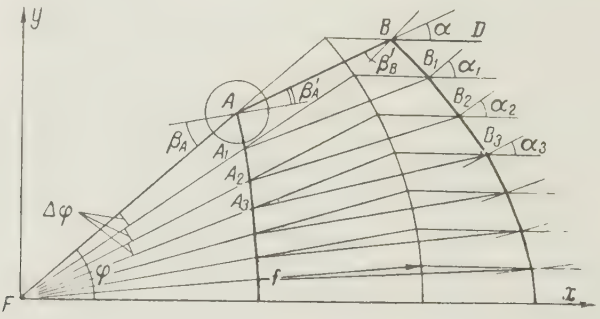



Рис. 3. Построение профилей апланатической линзы

Рассмотрим графическое построение преломляющих профилей апланатической двупреломляющей линзы. С этой целью, так же, как и при построении двухзеркальной системы, строим семейство падающих из фокуса и соответствующих выходящих из линзы лучей, которые пересекаются на окружности радиуса $f$ (см. рис. 3). Соединяя точки $A$ и $B$ прямой, положим, что крайний луч имеет вид ломаной $FABD$. При этом, если коэффициент преломления линзы $n > 1$, точка $A$ выбирается на падающем из фокуса луче внутри указанного круга, а $B$ — на выходящем луче вне круга *. Поскольку коэффициент преломления в линзе считается известным, то, используя закон преломления, можно определить положение элементарных преломляющих поверхностей (в точках $A$ и $B$), обеспечив заданную форму луча в виде ломаной $FABD$. Нетрудно определить, что углы падения $\beta_A$ и $\beta_B$ в точках $A$ и $B$ соответственно равны

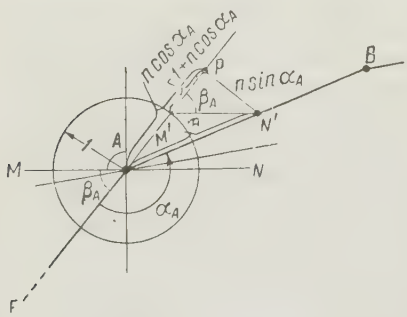



Рис. 4. Графическое построение нормали $MN$ и угла падения $\beta_A$ в точке $A$

$$\beta'_A = \operatorname{arctg}\frac{-n\sin\alpha_A}{1 + n\cos\alpha_A}, \qquad (6)$$

$$\beta'_B = \operatorname{arctg}\frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha - 1}, \qquad (7)$$

где $\alpha_A$ — больший угол между прямыми $FA$ и $AB$ и $\alpha$ — меньший угол между прямыми $AB$ и $BD$.

Углы падения $\beta_A$ и $\beta_B$, а следовательно и нормали к элементарным преломляющим поверхностям в точках $A$ и $B$, можно построить графическим методом. Рассмотрим построение нормали к преломляющей поверхности в точке $A$. Строим единичную окружность (см. рис. 4) с центром

* Можно показать графическим построением, что для апланатической диэлектрической ($n>1$) линзы точка $A$ должна лежать внутри круга радиуса $f$, а $B$ — вне его. Для линзы с $n<1$ точки $A$ и $B$ должны лежать внутри этого круга.

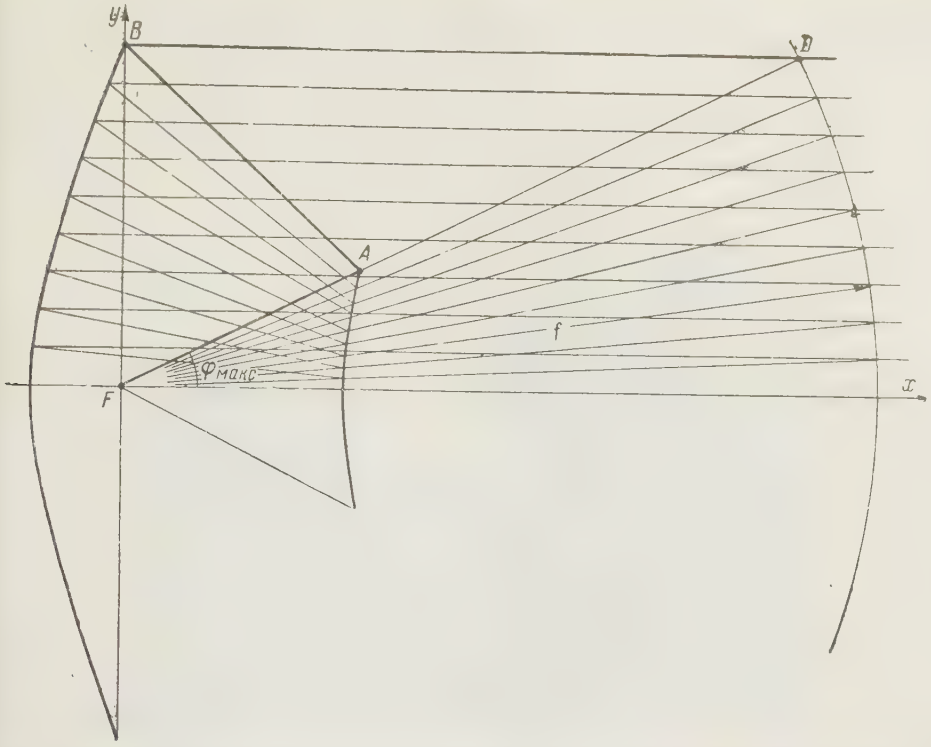



Рис. 5. Профили зеркал апланатической системы с незначительной экранировкой большого зеркала малым

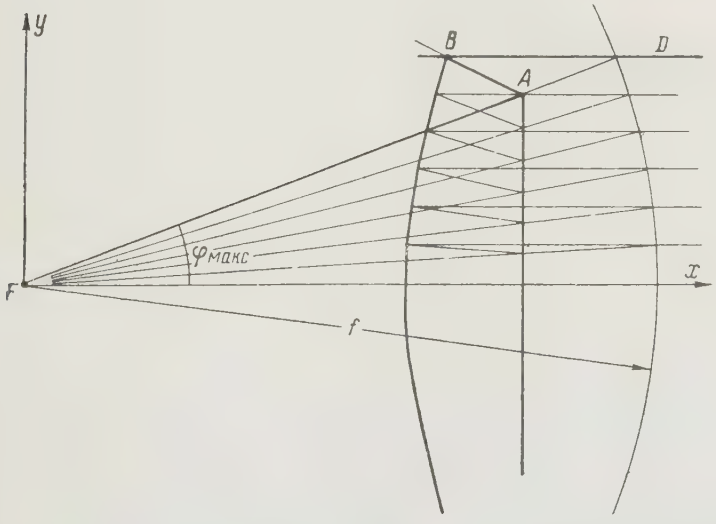



Рис. 6. Профили зеркал апланатической системы, в которой из-за большой экранировки одного зеркала другим целесообразно зеркала сместить по вертикали

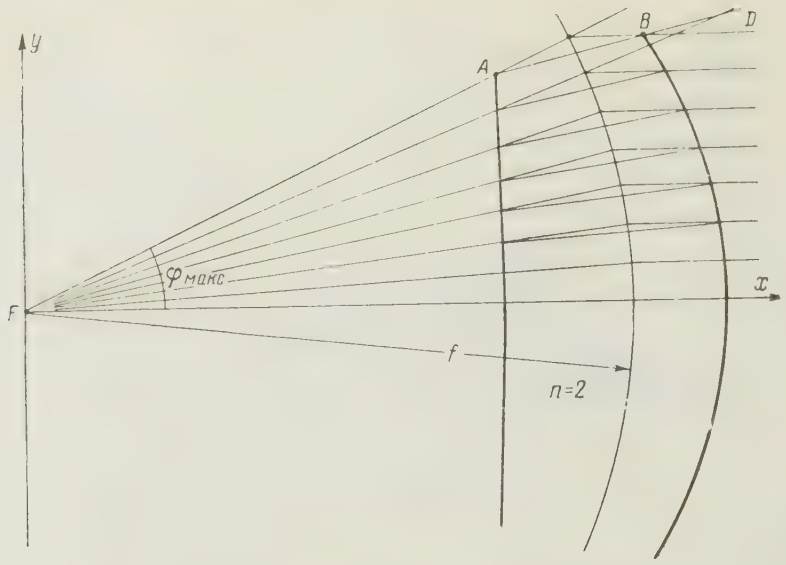



Рис. 7. Профили апланатической линзы

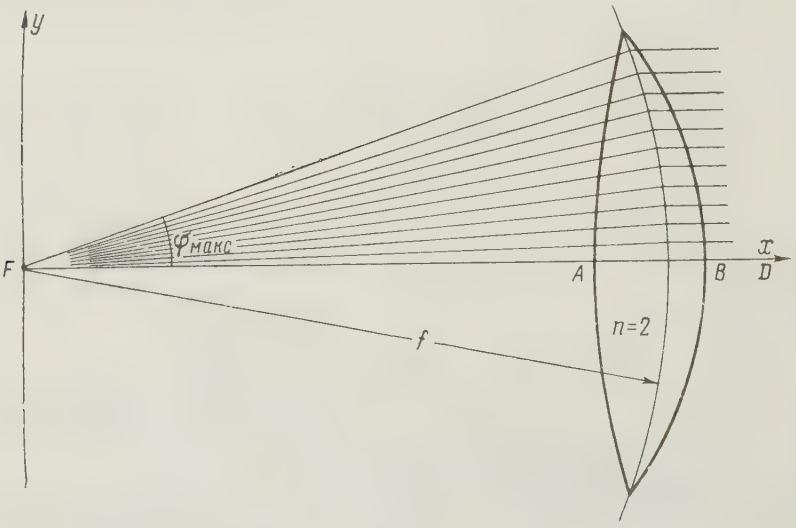



Рис. 8. Профили «тонкой» апланатической линзы

в точке $A$ и на прямой $AB$ откладываем отрезок $AN'$, длина которого равна $n$. Из точки $N'$ опускаем перпендикуляр на прямую $FA$ и соединяем прямой точку $N'$ с точкой $M'$, которая получается в результате пересечения единичной окружности с продолжением прямой $FA$. Как видно из рисунка и формулы (6), угол $N'M'P$ равен углу падения $\beta_A$ к точке $A$, а прямая $M'N'$ параллельна нормали к профилю преломляющей поверхности. Таким образом, положение элементарной преломляющей поверхности в точке $A$ найдено. Построение нормали в точке $B$ и во всех последующих точках $A_1$, $A_2$, $A_3$,... и $B_1$, $B_2$, $B_3$,... производится так же, как и в точке $A$. Вся процедура построения профилей преломляющих поверхностей линзы такая же, как и в случае двухзеркальной системы (см. рис. 3).

В результате построения мы получим приближенную форму профилей преломляющих поверхностей апланатической линзы. Рекуррентные формулы для координат точек профилей линзы имеют вид

$$x_{A_k} = x_{A_{k-1}} \frac{\operatorname{tg}[\varphi_{\text{макс}} - (k-1)\,\Delta\varphi] + \operatorname{ctg}(\alpha_{k-1} - \beta'_{A_{k-1}})}{\operatorname{tg}(\varphi_{\text{макс}} - k\Delta\varphi) + \operatorname{ctg}(\alpha_{k-1} - \beta'_{A_{k-1}})}, \tag{8}$$

$$y_{A_k} = x_{A_k} \operatorname{tg}(\varphi_{\text{макс}} - k\Delta\varphi), \tag{9}$$

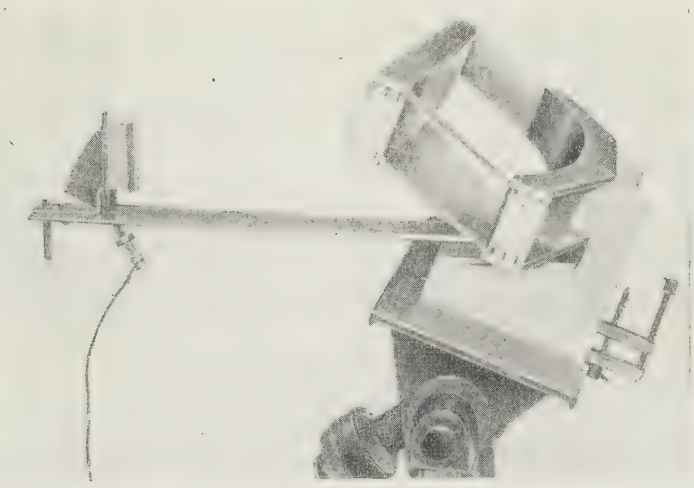


Рис. 9. Макет зеркальной антенны

$$x_{B_k} = x_{B_{k-1}} + 2f \operatorname{tg}\beta_{B_{k-1}} \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left[\varphi_{\text{макс}} - \frac{(2k-1)\,\Delta\varphi}{2}\right], \tag{10}$$

$$y_{B_k} = f \sin(\varphi_{\text{макс}} - k\Delta\varphi), \tag{11}$$

где

$$\operatorname{tg}\beta_{B_{k-1}} = \frac{n \sin\alpha_{k-1}}{n\cos\alpha_{k-1} - 1}; \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\beta'_{A_{k-1}} = \frac{\sin[\varphi_{\text{макс}} - (k-1)\,\Delta\varphi - \alpha_{k-1}]}{n - \cos[\varphi_{\text{макс}} - (k-1)\,\Delta\varphi - \alpha_{k-1}]}; \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{k-1} = \frac{y_{B_{k-1}} - y_{A_{k-1}}}{x_{B_{k-1}} - x_{A_{k-1}}}. \tag{14}$$

Построение профилей как двухзеркальной, так и линзовой антенн производилось, начиная с крайних точек. Однако такое построение можно проводить, полагая исходные точки лежащими на оси, задаваясь толщиной линзы, либо расстоянием между зеркалами. Такое построение предпочтительнее для линз, так как при этом можно получить линзу минимальной толщины.

С использованием изложенной методики были разработаны несколько вариантов апланатических систем. Некоторые профили зеркальной и линзовой антенн приведены на рис. 5—8. Как видно из этих рисунков, может оказаться, что одно из зеркал значительно экранирует другое (см. рис. 6). Однако при практическом выполнении двухзеркальной системы такой экранировки можно избежать различными способами. Так, например, если для данной антенны условие синусов выполняется в го-

ризонтальной плоскости, то зеркала следует сместить по вертикали (см. рис. 9). Тогда экранировки между зеркалами не будет.

По изложенной выше методике была рассчитана зеркальная антенна, макет которой показан на фотографии (рис. 9). Качание луча осуществлялось поворотом параболического рупора, который для этого устанавливался на специальном кронштейне. Отношение фокусного расстояния $f$ к раскрыву $D$ было равным 0,8. На рис. 10 представлены эксперимен-

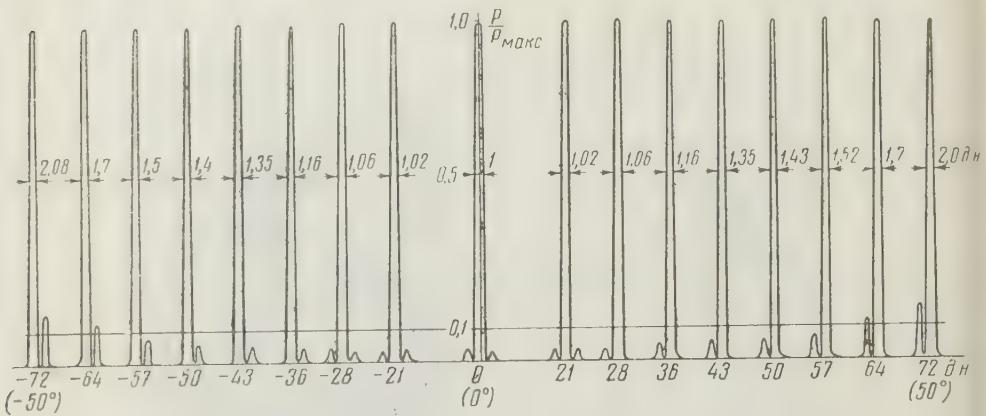



Рис. 10. Диаграммы направленности двухзеркальной системы

тальные диаграммы направленности, которые снимались при качании максимума диаграммы на ± 50° от оси антенны (на рис. 10 угловые величины отнесены к ширине диаграммы в центральном положении). Как видно из рис. 10, изготовленный макет антенны при $f/D = 0{,}8$ обеспечивает неискаженное качание в широком секторе углов. Точность построения профилей зеркал оказалась достаточной для практических целей.

Автор благодарен Л. С. Бененсону за интерес к работе и ценные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. К. Шварцшильд, Исследования по геометрической оптике, ч. I, II, 1905. Перевод 257, БНТ МО, 1946.
2. Де Вор, Джемс, Дж. Браун, С. Джонсидр. Линзовые антенны с качанием луча, Сб. Вопр. радиолокационной техники, 1951, вып. 5, стр. 3—37.
3. A. S. Dunbar, Calculation of doubly curved reflectors for shaped beams, Proc. I. R. E., 1948, 36, 10, 1289.
4. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, 1959, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского.
5. G. P. Foldes, L. Solymar, Lens aerial design, Electronic and Radio Engng, 1959, 36, II, 2, 73.

Поступила в редакцию
28 V 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 2

# ПОДАВЛЕНИЕ ТОКОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НА МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ЭКРАНЕ ДИФРАКЦИОННОЙ АНТЕННОЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

*О. Н. Терешин, А. Е. Соколов*

Рассмотрен способ подавления электрических токов, возбужденных дифракционной антенной на металлической поверхности. Подавление осуществляется при помощи чистореактивного поверхностного сопротивления. Способом подавления электрических токов можно пользоваться для развязки двух антенн дифракционного типа, а также для снижения уровня излучения назад и уменьшения влияния размеров металлического экрана на диаграмму направленности дифракционных антенн. Экспериментальные данные показывают, что степень подавления поверхностных токов определяется максимальной скоростью изменения чистореактивного поверхностного сопротивления, которая достигается при практической реализации последнего.

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена возможность создания развязывающего устройства между двумя щелевыми антеннами неограниченной длины. В ней показано, что в этом двумерном случае степень развязки определяется максимально достижимой скоростью изменения чистореактивного поверхностного сопротивления. В работе [2] отмечено, что при создании развязывающих устройств для антенн конечной длины достижимая степень развязки ограничена уровнем токов, огибающих развязывающую структуру, построенную по выводам, следующим из рассмотрения двумерной задачи.

В настоящей работе приведены результаты теоретического и экспериментального исследований развязывающих устройств для антенн конечных размеров с круглым выходным отверстием. Изложены результаты экспериментальной проверки работы развязывающих устройств, построенных согласно выводам [1], а также влияния развязывающих устройств на диаграммы направленности щелевых антенн.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о развязывающем устройстве для дифракционных антенн конечных размеров.

На плоскости $z = 0$ дана поверхность полного сопротивления.

В начале координат в области $S$ расположена дифракционная антенна (рис. 1), распределение токов в которой симметрично относительно угла $\varphi$. В этом случае граничные условия на поверхности полного сопротивления при $z = 0$ можно записать в виде

$$Z(r) = -\frac{E_r}{H_\varphi} \text{ при } z = 0,$$
$$\frac{E_z}{H_r} = 0 \qquad \text{при } z = 0, \tag{1}$$

где $E_r$, $E_z$, $H_r$, $H_\varphi$ — тангенциальные составляющие электрического и магнитного векторов поля; $Z(r)$ — функция распределения величины полного поверхностного сопротивления.

При получении чистореактивного поверхностного сопротивления при помощи ребристой структуры соотношение (1) справедливо в том случае,

если ширина канавок много меньше длины волны, а ширина ребер значительно меньше ширины канавок.

Предположим, что поле первичных источников, заданных в области $S$, в свободном пространстве имеет характер $TM$-волн.

Как показано в [1], степень ограничения растекания токов можно характеризовать степенью спадания тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности $z = 0$ по радиальному направлению. Построение решения аналогично выкладкам, проделанным в [1], и поэтому мы остановимся только на основных этапах. Как и ранее, зададим поле в виде

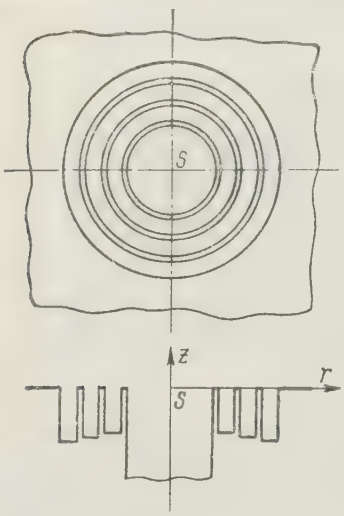


Рис. 1

$$H_\varphi(r, z) = e^{-Z^*(r, z)}, \tag{2}$$

где

$$Z^*(r, z) = Z_1(r, z) + iZ_2(r, z). \tag{3}$$

Здесь $Z_1$ и $Z_2$ — действительные функции аргументов $r$ и $z$.

Для рассматриваемого частного случая $TM$-волн от первичного источника из уравнений Максвелла следует

$$E_r = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \tag{4}$$

где $\varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Подставляя (4) и (2) в (1), получаем

$$Z(r) = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial Z^*}{\partial z} = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial Z_1}{\partial z} + \frac{1}{\omega\varepsilon}\frac{\partial Z_2}{\partial z} \text{ при } z = 0. \tag{5}$$

Условие чистой реактивности поверхностного сопротивления можно представить в виде

$$\frac{\partial Z_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0. \tag{6}$$

Тангенциальная составляющая магнитного поля $H_\varphi$ должна удовлетворять однородному волновому уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{H_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + k^2 H_\varphi = 0. \tag{7}$$

Далее, как и в [1], для нахождения класса функций, удовлетворяющих граничным условиям (1) и волновому уравнению (7), достаточно рассмотреть область, прилегающую как угодно близко к плоскости $z = 0$, где функции $Z_1$ и $Z_2$ могут быть представлены асимптотическими разложениями по степеням $z$ вида

$$\begin{aligned} Z_1(r, z) &= Z_1^0(r) + Z_1'(r)\, z + Z_1''(r)\, z^2, \\ Z_2(r, z) &= Z_2^0(r) + Z_2'(r)\, z + Z_2''(r)\, z^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя асимптотические разложения (8) в волновое уравнение (7) и предполагая $z$ сколь угодно малым, а также раздельно приравнивая мнимую и действительную части нулю, приходим к уравнениям

$$Z_1'(r) = \pm\sqrt{\left(\frac{dZ_2^0}{dr}\right)^2 - \left(\frac{dZ_1^0}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{dZ_1^0}{dr} - \frac{d^2Z_1^0}{dr^2} - 2Z_1''(r) - \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)}, \tag{9}$$

$$\frac{d^2Z_2^0}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dZ_2^0}{dr} + 2Z_2''(r) + 2\left(\frac{dZ_1^0}{dr}\right)\left(\frac{dZ_2^0}{dr}\right) = 0. \tag{10}$$

Для случая дифракционных антенн следует положить в (8) $Z_1''$ и $Z_2''$ равными нулю.

Легко показать, используя формулы, полученные в [3], что в точках поверхности $z = 0$, лежащих вне области $S$, где задана первичная дифракционная антенна, для удовлетворения условиям излучения следует в (9) выбрать знак минус.

При сделанных ограничениях условие чистой реактивности поверхностного сопротивления запишется в виде

$$\frac{d^2Z_2^0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dZ_2^0}{dr} + 2\left(\frac{dZ_1^0}{dr}\right)\left(\frac{dZ_2^0}{dr}\right) = 0, \tag{11}$$

а требуемое распределение поверхностного сопротивления находится по формуле

$$Z(r) = \frac{i}{\omega\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{dZ_2^0}{dr}\right)^2 - \left(\frac{dZ_1^0}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{dZ_1^0}{dr} - \frac{d^2Z_1^0}{dr^2} - \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)}. \tag{12}$$

Если координату точки наблюдения ($r$) в (11) и (12) устремить к бесконечности, то эти выражения асимптотически переходят в выражения, полученные в [1] для двумерной задачи.

Таким образом, законы распределения чистореактивного поверхностного сопротивления, рассчитанные для одного и того же закона изменения тангенциальной составляющей магнитного поля около поверхности $z = 0$, для симметричной антенны конечных размеров и в двумерном случае различаются лишь при малых расстояниях от антенны.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ

а) Измерение распределения амплитуды и фазы тангенциальной составляющей магнитного поля вдоль структуры. Экспериментальное исследование распределения амплитуды и фазы поверхностных электрических токов, возбуждаемых щелевой антенной, производилось обычным способом на макете, представленном на рис. 2. Требуемое чистореактивное поверхностное сопротивление реализовалось при помощи ребристой структуры с периодом $b = 0{,}156\ \lambda$ и толщиной ребер $\Delta = 0{,}03\ \lambda$. Длина ослабляющей структуры 1,56 $\lambda$. При расчете структуры функция изменения амплитуды тангенциальной составляющей магнитного поля $H_x$ по оси $y$ задавалась в виде

$$|H_x| = e^{Z_1^0(y)} = e^{-\beta y}, \tag{13}$$

где $\beta$ — коэффициент затухания. Тогда необходимый закон изменения чистореактивного поверхностного сопротивления, согласно [1], определяется формулой

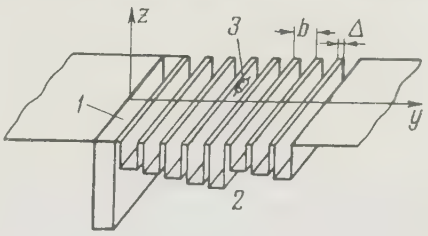



Рис. 2.

*1* — щелевая антенна; *2* — подавляющая структура; *3* — измерительный зонд

$$Z_2(y) = \frac{i}{\omega\varepsilon}\sqrt{e^{4\beta y}C - \beta^2 - k^2}. \tag{14}$$

Результаты эксперимента приведены на рис. 3 и в табл. 1. На рис. 3 представлены расчетные (*а*) и экспериментальные (*б*) распределения амплитуды и фазы (для $\beta = 0{,}475\ k$) поля вдоль ослабляющей структуры для различных коэффициентов затухания. Прямоугольниками обозначены глубины канавок ребристой структуры для случая $\beta = 0{,}475\ k$.

В табл. 1 приведены значения ослаблений поля, создаваемых всей подавляющей структурой.

Исследование подавления поверхностных токов, возбуждаемых первичной антенной в виде открытого конца круглого волновода (волна $E_{01}$) в металлическом экране, проводилось на макете, представленном на рис. 4.

Таблица 1

| Коэффициент затухания $\beta$ | Коэффициент $C$ | Расчетное ослабление, *дб* | Экспериментально измеренное ослабление, *дб* |
|---|---|---|---|
| $0{,}237k$ | $1{,}05k^2$ | 20 | 15 |
| $0{,}475k$ | $1{,}22k^2$ | 40 | 14 |
| $0{,}712k$ | $1{,}53k^2$ | 60 | 19 |

Требуемое чистореактивное поверхностное сопротивление реализовалось при помощи дисковой ребристой структуры с периодом $b = 0{,}12\ \lambda$ и $\Delta = 0{,}01\ \lambda$.

Функция изменения амплитуды тангенциальной составляющей магнитного поля $H_\varphi$ по радиальной оси задавалась в виде

$$|H_\varphi| = \frac{e^{-\beta r}}{r}. \tag{15}$$

Необходимый закон изменения поверхностного сопротивления, согласно (12), определяется по формуле

$$Z(r) = \frac{i}{\omega\varepsilon}\sqrt{C\frac{e^{4\beta r}}{r^2} - \beta^2 - \frac{\beta}{r} - \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)}. \tag{16}$$

Измерение амплитуды поверхностных токов производилось по степени возбуждения приемной щелевой антенны, расположенной на фиксированном расстоянии от передающей антенны. Подавляющая структура длиной 0,9 $\lambda$ вводилась на участке между передающей и приемной антеннами.

Таблица 2

| Коэффициент затухания $\beta$ | Расчетное ослабление, *дб* | Экспериментально измеренное ослабление, *дб* |
|---|---|---|
| $0{,}16k$ | 8,4 | 8,0 |
| $0{,}32k$ | 16,7 | 14,0 |
| $0{,}48k$ | 25,1 | 16,0 |
| $0{,}64k$ | 33,5 | 16,0 |

Результаты экспериментальной проверки представлены в табл. 2, где приведены лишь добавочные ослабления, вносимые за счет присутствия подавляющей структуры.

Перейдем к обсуждению полученных результатов.

Как следует из рассмотрения приведенных результатов, в обоих случаях расчетные и экспериментальные значения ослаблений поля и законы изменения амплитуды поля по структуре для малых коэффициентов затухания $\beta$ совпадают достаточно точно. Расхождение результатов для больших коэффициентов ослаблений можно объяснить следующим образом. При увеличении коэффициента затухания требуется и большая скорость изменения чистореактивного поверхностного сопротивления (см. (14), (16)), которую реализовать при помощи ребристой структуры с конечной шириной канавки невозможно. Действительно, вследствие конечной ширины канавок и толщины стенок требуемое плавное распределение чистореактивного поверхностного сопротивления аппроксимируется ступенчато. Поэтому практически закон изменения чистореактивного поверхностного сопротивления задают первые 3—4 канавки, а далее сопротивление перестает возрастать из-за неточности выполнения глубин канавок (см. рис. 3). С этой точки зрения целесообразно для увеличения ослабления периодически повторять по всей структуре закон изменения поверхностного сопротивления, который реализуется первыми канавками.

Если распространить на всю структуру закон изменения, реализуемый первыми тремя канавками для случая щелевой антенны и $\beta = 0{,}475\ k$, то ослабление значительно возрастает и достигает 33 *дб* (кривая *d* на рис. 3). Для дисковой структуры (при повторении по всей структуре закона, реализуемого первыми двумя канавками) получены следующие результаты: при $\beta = 0{,}48\ k$ ослабление возросло до 25 *дб*, при $\beta = 0{,}64\ k$ ослабление возросло до 33 *дб*.

При заданных габаритах подавляющей структуры степень ослабления можно увеличить за счет применения ребристой структуры с малым периодом ($b \simeq 0{,}025\ \lambda$ и менее). При экспериментальной проверке для случая диска с чистореактивным поверхностным сопротивлением такая структура выполнялась в виде диэлектрических колец различной высоты, обернутых латунной фольгой. Из набора таких колец, плотно прилегающих друг к другу, и собиралась структура.

Измерения показали, что при размере такой структуры, равном 0,1 $\lambda$, полученная развязка равнялась 10 *дб*, что соответствует $\beta = 2{,}4\ k$. Вполне очевидно, что это значение не является пределом. Применение ребристых структур с еще меньшими периодами позволит получить значительно бо́льшие ослабления поля.

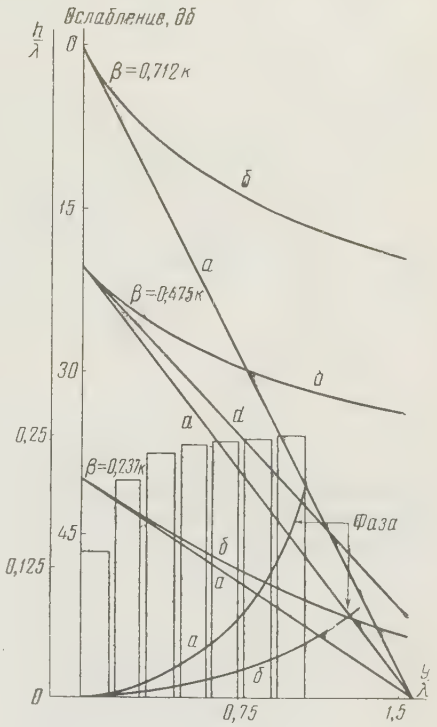



Рис. 3

Отметим также, что при периодическом повторении участка с наибольшей скоростью изменения чистореактивного поверхностного сопротивления формулы (14) и (16) становятся несправедливыми на участке резкого обратного скачка поверхностного сопротивления (переход к следующему периоду), коль скоро в этой точке $dZ_1'/dr \to \infty$, а, как показано в [1], формулы (14), (16) справедливы с точностью до членов порядка $\frac{dZ_1'}{dr} z$.

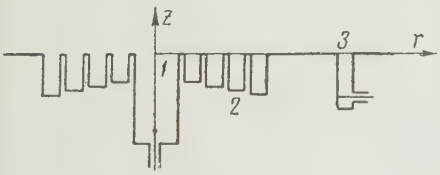



Рис. 4.

*1* — передающая антенна; *2* — подавляющая структура; *3* — приемная щелевая антенна

Однако кривая изменения амплитуды поля при периодическом повторении участков с резким изменением чистореактивного поверхностного сопротивления (рис. 3, кривая *d*) показывает, что закон изменения амплитуды поля весьма близок к расчетному для непрерывного его изменения. Это означает, что в пределах каждого периода изменения сопротивления формулы (14) и (16) остаются справедливыми, и в каждой точке скачка поверхностного сопротивления коэффициент отражения невелик.

Таким образом, в конечном счете определяющей является скорость изменения чистореактивного поверхностного сопротивления.

б) Применение подавляющей структуры для исключения влияния металлической плоскости за ограничивающей структурой на диаграмму направленности щелевой антенны. С этой целью сни-

мались диаграммы направленности двух макетов, отличавшихся наличием или отсутствием металлического экрана за подавляющей структурой. Подавляющая структура имела длину 0,1 $\lambda$ и давала ослабление порядка 10 *дб*.

На рис. 5 приведена диаграмма направленности узкой щелевой антенны, прорезанной в середине экрана длиной в 6 $\lambda_0$ (схематические изображе-

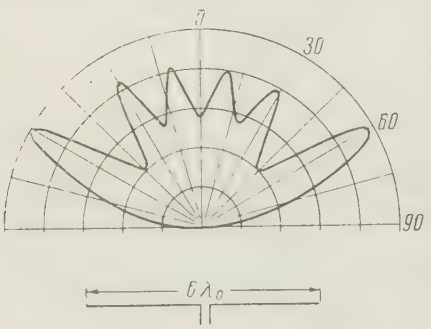



Рис. 5

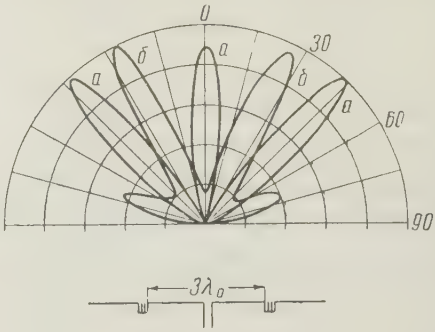



Рис. 6

ния соответствующих экспериментальных макетов показаны на каждом рисунке). На рис. 6 приведены диаграммы той же щелевой антенны при включении в середину каждого плеча ослабляющей структуры для двух частот, отличающихся на 20% ($а$ — на частоте $f_0$, $б$ — на частоте $f_1=0{,}8f_0$). На рис. 7 изображены диаграммы направленности для тех же частот в случае, когда внешние части экранов отсутствуют. Диаграммы рис. 8 со-

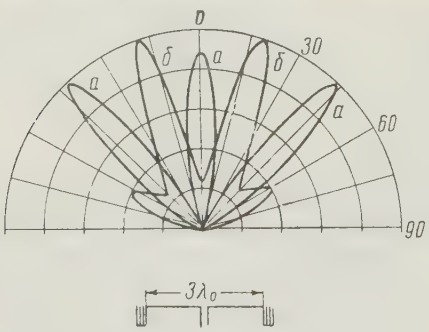



Рис. 7

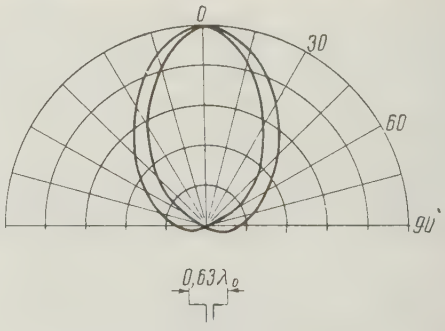



Рис. 8

ответствуют макету с малой длиной экрана ($L=0{,}63\ \lambda_0$) для случая отсутствия на конце экрана ослабляющей структуры (более широкая) и для случая включения его (более узкая). При сравнении диаграмм направленностей для частоты $f_0$, представленных на рис. 6 и 7, видно, что исключение внешних частей экранов не искажает диаграмму направленности; это свидетельствует об отсутствии токов на этих частях.

Диаграмма направленности в этом случае создается как за счет излучения токов, текущих по экрану, так и за счет излучения подавляющей структуры (ср. с рис. 5), что подтверждается и изменением диаграммы направленности при частоте $f_1$, отличающейся от $f_0$ на 20%. На частоте $f_1$ наблюдается незначительное искажение диаграммы направленности при исключении участков экрана за подавляющей структурой. Это объясняется некоторым снижением запирающих свойств ребристой структуры в силу уменьшения перепадов чистореактивного поверхностного сопротивления по ослабляющей структуре при уменьшении частоты.

Помещение подавляющей структуры на краю малого экрана (рис. 8) приводит к снижению уровня излучения назад.

## ВЫВОДЫ

1. При достаточно хорошей практической реализации требуемого чистореактивного поверхностного сопротивления степень ослабления поверхностных токов хорошо совпадает с расчетной.

2. Оптимальным с точки зрения получения максимальных ослаблений является использование периодически повторяющихся участков с резко переменным чистореактивным поверхностным сопротивлением.

3. Подавляющая структура в виде периодически повторяющихся участков ребристой структуры с малым периодом позволяет осуществить значительно бо́льшие развязки по сравнению с известным развязывающим устройством типа «запирающий паз» [4] при их одинаковых размерах (27 *дб* по сравнению с 9 *дб*). Еще бо́льшую степень развязки дает уменьшение периода ребристой структуры.

4. Применение подавляющей структуры в виде периодически повторяющихся участков с резко переменным чистореактивным поверхностным сопротивлением по длине позволяет исключить влияние металлической плоскости за ограничивающей структурой на диаграмму направленности щелевой (дифракционной) антенны.

5. Применение ограничивающих структур на краю экрана щелевой антенны позволяет получить малый уровень излучения назад.

6. Ребристая структура с чистореактивным поверхностным сопротивлением при изменении частоты на 20% мало снижает свои ограничивающие свойства. Изменения диаграмм направленности при разных частотах связаны, по-видимому, с изменением характера излучения ограничивающей структуры, а также с изменением картины распределения токов на участке от антенны до ограничивающей структуры.

Следует ожидать, что путем подбора характера излучения ограничивающей структуры можно будет установить оптимальные законы изменения чистореактивного поверхностного сопротивления для ограничивающей структуры с точки зрения малого искажения диаграммы направленности антенны с учетом экрана конечных размеров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Терешин, Развязка двух антенн щелевого типа при помощи ребристой структуры, расположенной в плоскости щелей, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 1944.
2. О. Н. Терешин, А. С. Белов, К вопросу о развязке антенн щелевого типа с помощью импедансной структуры, лежащей в плоскости щелей, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1960, 3, 3, 359.
3. Г. Т. Марков, Возбуждение круглого волновода, ЖТФ, 1952, 22, 5, 747.
4. W. K. Saunders, Control of surface currents by the use of channels, IRE Trans., 1956, AP-4, 1.

Поступила в редакцию
11 VI 1960

1961 № 2

# РАСЧЕТ ПЕРЕХОДОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ МАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

*Б. З. Каценеленбаум, З. А. Малина*

Изложены методы численного расчета симметричного волноводного перехода между двумя волноводами разных диаметров для симметричной магнитной волны.

## ВВЕДЕНИЕ

При переходе волны $H_{01}$ в круглом волноводе из волновода одного диаметра в волновод другого диаметра возникают отраженная волна $H_{01}$ и паразитные волны $H_{0i}$ $(i > 1)$ обоих направлений. В ряде случаев появление паразитных волн существенно нарушает условия работы волноводного тракта. Уменьшение амплитуд паразитных волн в широком диапазоне частот за счет увеличения длины конусного перехода требует применения очень длинных (более 1 *м*) конусов. Ниже указаны некоторые методы расчета симметричных переходов с образующей сложной формы. Применение таких сглаженных переходов позволяет получить малое преобразование при относительно малой длине переходов. Расчет основан на системе дифференциальных уравнений для амплитуд волн в нерегулярном волноводе, полученной в [1] и рассмотренной в [2] и [3].

Некоторое усложнение в математический аппарат задачи вносит наличие так называемого критического сечения для паразитной волны. При анализе этого случая применен метод, развитый в [4]. Примеры, приведенные в статье, иллюстрируют особенности предлагаемых методов расчета.

## 1. ВЫБОР ФОРМЫ ОБРАЗУЮЩЕЙ

При выборе формы переходного участка будем исходить из аналогии (см. [2] и [5]), существующей в некотором приближении, между рассматриваемой задачей и задачей о нахождении оптимального закона изменения волнового сопротивления участка длинной линии, согласующего две линии с различными волновыми сопротивлениями.

Коэффициент отражения $R$ от участка длинной линии с волновым сопротивлением $W(z)$ равен

$$R = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\ln W}{d\xi} e^{-2ikL\xi}\, d\xi, \tag{1}$$

где $L$ — длина участка, $\xi = z/L$.

С другой стороны, если в системе уравнений (12) из [1] или, что то же, в (39)—(40) из [3] всюду, кроме экспоненты, пренебречь отличием волновых чисел $h_1$ и $h_2$ волн $H_{01}$ и $H_{02}$ от волнового числа в свободном пространстве (в § 2 законность этого приближения оценивается на примерах), то амплитуда прямой волны $H_{02}$ будет равна

$$D(\sigma) = C\int_0^1 \frac{d\ln a}{d\xi} e^{-i\sigma\xi}\, d\xi. \tag{2}$$

Относительные потери энергии равны $|D|^2$. Здесь параметр $\sigma$ равен разности набега фаз обеих волн на всей длине перехода:

$$\sigma = \int_0^L (h_1 - h_2)\, dz; \tag{3}$$

$\xi$ — новая переменная, определенная как

$$\xi = \frac{1}{\sigma}(\gamma_1 - \gamma_2), \tag{4}$$

где $\gamma_p = \int_0^z h_p\, dz$; $C$ — постоянная, равная

$$C = -\frac{2\mu_1\mu_p}{\mu_p^2 - \mu_1^2}; \tag{5}$$

$\mu_p$ — $p$-й корень уравнения $J_1(\mu) = 0$. С той же степенью точности, с какой справедливо (2), связь между $\xi$ и $z$ можно представить в виде

$$z(\xi) = \frac{L}{a_{\text{ср}}^2}\int_0^\xi a^2\, d\xi, \tag{6}$$

где

$$a_{\text{ср}}^2 = \int_0^1 a^2(\xi)\, d\xi; \tag{7}$$

$a$ — радиус переходного волновода, рассматриваемый как функция переменной $\xi$.

Сравнивая (1) и (2), видим, что в (2) $D$ и $a$ связаны так же, как $R$ и $W$ в (1). Роль параметра $2kL$ в (2) играет параметр $\sigma$, который определяется выражением

$$\sigma = \frac{\mu_p^2 - \mu_1^2}{4\pi}\,\frac{\lambda L}{a_{\text{ср}}^2}. \tag{8}$$

С ростом частоты $\sigma$ убывает. При этом амплитуды прямых паразитных волн, возникающих на переходе, растут, так как уменьшается разность фазовых постоянных волн различных типов и ослабляется взаимная компенсация паразитных волн, формирующихся в различных участках волновода. Заметим, что в (1) длина волны входит иначе, чем в (2), так как в выражение для амплитуды отраженной волны входит сумма фаз обеих волн, а не их разность. Функции $a(\xi)$ будем выбирать такими же, какими в теории длинных линий выбирают $W(\xi)$. Задавшись $a(\xi)$, можно по (6) и (7) найти $z(\xi)$, т. е. в параметрическом виде определить форму образующей. Амплитуда паразитной волны находится по (8) и (2). Для выбора $a(\xi)$ будем пользоваться функциями, данными в [6]. Заметим, что поиски истинного оптимума [7] для интеграла (2) не имеют в нашем случае смысла, так как само выражение (2) для нашей задачи является приближенным.

Вид функции $a(\xi)$ зависит от того, какое максимальное значение амплитуды паразитной волны допустимо. Примем, например, что $|D|$ должна быть порядка $(3—5)\cdot 10^{-2}$ (амплитуда волны $H_{01}$ принята равной единице). В этом случае можно пользоваться функцией $W(\xi)$, определенной формулой (8) из [6]. Учтем еще, что при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ радиус волновода принимает заданные значения $a(0)$ и $a(L)$. Тогда

$$a(\xi) = a(0)\, e^{\ln q\left(\xi - \frac{0{,}636}{2\pi}\sin 2\pi\xi\right)}, \tag{9}$$

где $q = a(L)/a(0)$. Образующая, построенная по этому закону, имеет на концах изломы, равные

$$\frac{da}{dz} = 0{,}364 \ln q \frac{a_{ср}^2}{L} \frac{1}{a}. \tag{10}$$

На широком конце излом меньше, чем на узком.

Для (9) функция $|D(\sigma)|$ имеет вид

$$|D(\sigma)| = \left| C \ln q \frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \frac{4\pi^2 - 0{,}364\,\sigma^2}{4\pi^2 - \sigma^2} \right|. \tag{11}$$

График $|D(\sigma)|/|\ln q|$ представлен на рис. 1. При $\sigma > \sigma_{мин} = 3\pi$, $|D(\sigma)| < 0{,}048 |\ln q|$. Зная $q$ и задав наименьшую длину волны в диапазоне $\lambda_{мин}$,

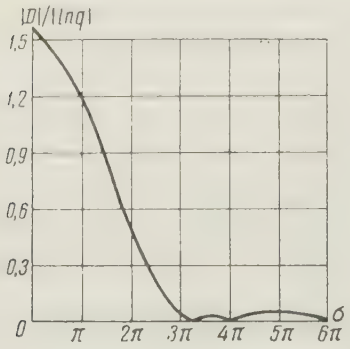



Рис. 1

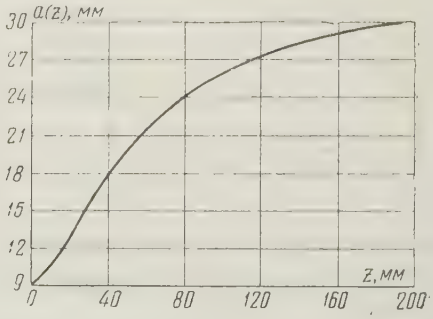



Рис. 2

можно по (7) и (8) определить минимальную длину перехода. Заметим, что переход, обеспечивающий достаточно малые потери на волне $H_{02}$, даст (в рамках уравнения (1)) еще меньшие потери на волнах $H_{03}$ и т. д.

Рассмотрим пример. Если $a(0) = 9$ *мм*, а $a(L) = 30$ *мм*, $\lambda_{мин} = 6{,}6$ *мм*, то длина перехода будет равна 193,7 *мм*. При всех $\lambda > \lambda_{мин}$ (в пределах применимости (2)) будет $|D(\sigma)| < 0{,}06$. Для конуса такие потери были бы достижимыми при длине, в 8—9 раз большей. График функции $a(z)$ представлен на рис. 2. Изломы на концах равны 5,4 и 1,6°. Для осуществления перехода с меньшими потерями следует воспользоваться какой-либо иной функцией из [6] или других работ по теории длинных линий.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОТСУТСТВИЕ КРИТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Вычислим теперь коэффициент преобразования, не делая упрощений, приведших к формуле (2). Для вычисления амплитуды прямой паразитной волны $D$ при выбранной форме образующей целесообразно пользоваться системой уравнений, которая получается из уравнений (39)—(40) статьи [3] при переходе к новой независимой переменной $\xi$ и новым функциям $b(\xi)$ и $d(\xi)$:

$$b(\xi) = Be^{i\gamma_2}, \quad d(\xi) = De^{-i\gamma_2}. \tag{12}$$

Величины $b$ и $d$ представляют собой амплитуды прямых и обратных паразитных волн; амплитуду волны $H_{01}$ считаем равной единице на всем переходе.

Обозначим дифференцирование по $\xi$ точкой. Тогда система уравнений примет вид

$$\dot{d} - ih_2 d\,\frac{a^2 L}{a_{\text{ср}}^2} - \frac{\dot{h}_2}{2h_2}\,b = \frac{C\dot{a}}{a}\,\frac{h_2 + h_1}{2\sqrt{h_1 h_2}}\,e^{-i\gamma_1},$$
$$\dot{b} - ih_2 b\,\frac{a^2 L}{a_{\text{ср}}^2} - \frac{\dot{h}_2}{2h_2}\,d = \frac{C\dot{a}}{a}\,\frac{h_2 - h_1}{2\sqrt{h_1 h_2}}\,e^{-i\gamma_1}. \tag{13а}$$

Краевые условия для этой системы имеют вид

$$d(0) = 0, \quad b(1) = 0. \tag{13б}$$

Непосредственное решение задачи (13) вызывает ряд трудностей, так как в (13б) входят условия на разных концах промежутка; (13а) — линейная система, поэтому ее можно свести к двум задачам Коши [8]. В первой задаче система уравнений совпадает с (13а), во второй — отличается от (13а) отсутствием правых частей. Начальные условия обеих задач

$$d(1) = 1, \quad b(1) = 0. \tag{14}$$

Решение системы (13) выражается через решения $d^{(1)}$, $b^{(1)}$ и $d^{(2)}$, $b^{(2)}$ этих задач Коши по формулам

$$d(\xi) = d^{(1)}(\xi) - \frac{d^{(1)}(0)}{d^{(2)}(0)}\,d^2(\xi), \tag{15а}$$

$$b(\xi) = b^{(1)}(\xi) - \frac{d^{(1)}(0)}{d^{(2)}(0)}\,b^2(\xi). \tag{15б}$$

Искомая амплитуда прямой паразитной волны $|D| = |d^{(1)}|$ равна согласно (15)

$$|D| = \left|1 - \frac{d^{(1)}(0)}{d^{(2)}(0)}\right|. \tag{16}$$

Указанные системы уравнений сводятся при разделении вещественной и мнимой частей к системам четырех уравнений, которые решались нами на БЭСМ методом Рунге — Кутта. На рис. 3 даны результаты расчета для перехода, форма образующей которого приведена на рис. 2. Сплошной линией представлен результат, полученный на БЭСМ по (15) и (16), пунктирной линией — вычисленный по (11). Сравнение кривых показывает, что допущение, сделанное в § 1, законно. Это подтверждает целесообразность принятого метода выбора формы образующей. В широком диапазоне, доходящем до длины волны, при которой уже возникает критическое сечение, потери будут лишь на несколько децибел выше, чем по (11). Однако детальный ход зависимости $|D|$ от $\lambda$ формулой (11) не передается.

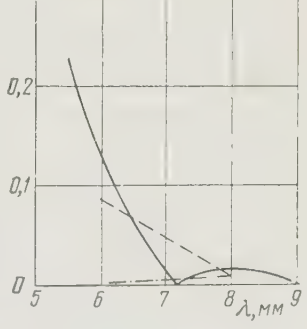



Рис. 3

Штрих-пунктирная кривая дает амплитуду обратной паразитной волны $|b(0)|$, вычисленной по (15б). Как и следует из общих соображений, обратная волна при этих условиях очень мала.

## 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КРИТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Пусть в некотором сечении $z = \tilde{z}$ волновое число волны $H_{02}$ обращается в нуль: $h_2(\tilde{z}) = 0$. Метод непосредственного численного расчета по (13), использованный в предыдущем параграфе, при этом неприменим, так как

коэффициенты в (13а) имеют особенности при $z = \tilde{z}$. Рассмотрим для определенности сужающийся переход. Потери на преобразование в нем определяются амплитудой паразитной волны, возвращающейся в широкий волновод, $|B(0)|$. Из формул (11) –(13) статьи [4] для $B(0)$ можно найти выражение

$$B(0) = \sqrt{\frac{h_1(0)}{h_2(0)}}\left\{e^{-2i\left(\tilde{\gamma}_2+\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^{z_L} C\,\frac{h_2+h_1}{2\sqrt{h_1h_2}}\,\frac{d\ln a}{dz}\,e^{-i(\gamma_1-\gamma_2)}\,dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^{z_L} C\,\frac{h_2-h_1}{2\sqrt{h_1h_2}}\,\frac{d\ln a}{dz}\,e^{-i(\gamma_1+\gamma_2)}\,dz \quad e^{-i\left(\tilde{\gamma}+\frac{\pi}{4}\right)}\int_{z_L}^{L} C\,\frac{e^{-i\gamma_1}}{\sqrt{h_1}}\,\frac{d\ln a}{dz}\,(V'-ih_1V)\,dz\right\}. \tag{17}$$

Здесь $z_L$ — любая точка, для которой $z_L < \tilde{z}$. Мы выберем $z_L$ очень близко к критическому сечению. Функции $V$ и $dV/dz$ выражаются через функции Эйри (см. [3] и [4]). Вычисление двух первых интегралов в (17) целесообразно свести к решению системы дифференциальных уравнений. Обозначим эти интегралы соответственно через $J_1$ и $J_2$ и введем функции

$$u = J_1e^{-i\gamma_1}, \quad v = J_2e^{i\gamma_2}. \tag{18}$$

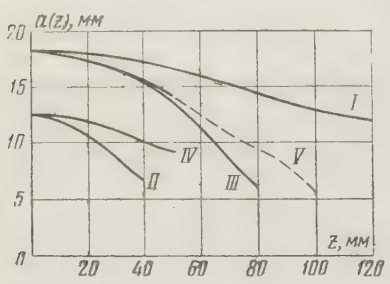



Рис. 4

В переменной $\xi$ эти функции удовлетворяют неоднородной системе уравнений, отличающейся от (13а) только отсутствием слагаемых с $h_2$. Начальные условия системы имеют вид

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0. \tag{19}$$

Мы производили вычисление первых двух слагаемых в (17) так же, как и системы (13), методом Рунге — Кутта.

Подынтегральное выражение в третьем слагаемом (17) быстро убывает при удалении в области $z > \tilde{z}$, поэтому третий интеграл мы считали по квадратурной формуле Гаусса с восемью абсциссами.

В качестве примера был рассчитан ряд образующих для различных значений $a(0)$ и $a(L)$. Формы их представлены на рис. 4 (кривые $I-IV$). В таблице приведены значения $|B(0)|$, полученные по изложенному методу для этих переходов. Вычисления производились для $\lambda = 8$ *мм*.

| № кривой | $\lvert B(0)\rvert$ |
|---|---|
| I | $1{,}7\cdot10^{-2}$ |
| II | $0{,}56\cdot10^{-2}$ |
| III | $26\cdot10^{-2}$ |
| IV | $1{,}2\cdot10^{-2}$ |

Как видно из таблицы, в некоторых случаях форма образующей, полученная по методу § 1, может при наличии критического сечения оказаться неудовлетворительной.

Анализ показывает, что наибольший вклад в $|B(0)|$ вносит первый интеграл в (17). Поэтому иногда оказывается необходимым выбирать $a(z)$ таким образом, чтобы именно этот интеграл, а не интеграл (2), сделать возможно малым.

Введем для этого функцию $F(a)$, определенную условием

$$dF = \frac{da}{a}\,\frac{h_1+h_2}{2\sqrt{h_1h_2}}. \tag{20}$$

Из (20) можно в явном виде найти $F(a)$: эту формулу мы не выписываем ввиду ее громоздкости. Выберем далее $a(\xi)$ таким образом, чтобы $F(a)$ было пропорционально выбранной — оптимальной для (1) — функции $\ln W(\xi)$. Здесь переменная $\xi$ определена как в (3) и (4) с заменой $L$

на $z_L$. Заметим, что в выражение для $F(a)$ входит частота (волновые числа $h_1$ и $h_2$ зависят от $k$), и мы выберем наиболее существенную частоту диапазона. Для других частот диапазона переход видоизмененной формы, вообще говоря, будет не лучше, чем переход, полученный в § 1.

Находя $F(a)$ и $F(\xi)$, определяем зависимость $a$ от $\xi$. Зависимость $z$ от $\xi$ определяется из условия

$$\frac{dz}{z_L} = \frac{h_1 + h_2}{2k} \frac{a^2(\xi)\, d\xi}{\int\limits_0^1 \frac{h_1 + h_2}{2k} a^2(\xi)\, d\xi}. \qquad (21)$$

Зная $a(z)$, мы можем, как и в предыдущем случае, найти длину $z_L$. Форма образующей для $z > z_L$ скажется только на значении третьего слагаемого в (17) и на величине $|B(0)|$ для более коротких волн, чем та, для которой найдено оптимальное в нашем смысле $a(z)$*.

На рис. 4 кривые *III*—*V* относятся к одним и тем же условиям, кривая *V* получена по изложенному методу. Как видно из рисунка, она всюду, кроме области, примыкающей к критическому сечению, для выбранной волны ($\lambda = 8$ *мм*) почти полностью повторяет кривую *III*. Поэтому переход с этой формой образующей дает для других волн примерно тот же результат, что и переход с образующей *III*. Значение $|B(0)|$, полученное для кривой *V*, оказалось равным 3,4%.

Разумеется, предложенный здесь метод, начинающийся с определения $F(a)$ по (20), можно применить и для построения переходов в отсутствие критического сечения. Однако удовлетворительные результаты, по-видимому, дает также и более простой метод, изложенный в § 1.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчет потерь для выбранной формы $a(z)$ в отсутствие критического сечения для каждого значения $\lambda$ занимает примерно 5 мин. на БЭСМ, а при наличии критического сечения — 10 мин. Построение широкополосных волноводных переходов с очень малыми потерями на преобразование (порядка 40—50 *дб*) и относительно небольшой длины потребует, вероятно, проверки нескольких форм $a(z)$ и может быть также учета изменения амплитуды волны $H_{01}$ вдоль перехода, а потому займет несколько часов машинного времени.

Пользуемся случаем, чтобы выразить благодарность сотрудникам расчетно-теоретической группы ИРЭ АН СССР за участие в вычислениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Нерегулярные волноводы с медленно меняющимися параметрами, Докл. АН СССР, 1955, **102**, 4, 711.
2. H. Unger, Circular waveguide taper of improved design, Bell System Techn. J., 1958, **37**, 4, 899.
3. Б. З. Каценеленбаум, Длинный симметричный волноводный переход для волны $H_{01}$, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 5, 531.
4. Б. З. Каценеленбаум, Критические сечения в нерегулярных волноводах, Докл. АН СССР, 1958, **123**, 1, 53.
5. B. Z. Katzenelenbaum, On the Theory of nonuniform waveguides with slowly changing parameters, Congrès International Circuits et Antennes Hyperfréquences, Paris, 1957, part I, p. 124.
6. J. Willis, N. Sihna, Nonuniform transmission lines as impedance transformers, Proc. I. E. E., 1956, **103B**, 8, 166.
7. R. Klopfenstein, A transmission line taper of improved design, Proc. I. R. E., 1956, **44**, 1, 31.
8. Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
24 VI 1960

* В практических расчетах мы выбирали $z_L$ так, чтобы выполнялось условие $|t| \ll \tilde{N}^{2/3}$, $|t| \gg 1$, где $t$ и $\tilde{N}$ определяются по [3].

# СИНТЕЗ СТУПЕНЧАТЫХ НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ

*А. Л. Фельдштейн*

Изложена теория направленных ответвителей в виде цепочки отрезков связанных линий. Система обладает теоретически идеальной направленностью и согласованием в неограниченной полосе частот и оптимальной (чебышевской либо максимально-гладкой) частотной характеристикой деления мощности между плечами. Рассмотрены некоторые свойства предельной системы, имеющей бесконечное число ступеней. Некоторые трудоемкие расчетные соотношения протабулированы.

## ВВЕДЕНИЕ

Отрезок однородных связанных линий может служить направленным ответвителем в широкой полосе частот [1, 2]. При каскадном соединении нескольких таких отрезков широкополосность системы увеличивается [3], в связи с чем представляет интерес разработка теории синтеза оптимального каскадного соединения связанных линий. Критерии оптимальности могут быть различными; мы рассмотрим два случая: направленный ответвитель с наименьшим числом звеньев (чебышевская или изоэкстремальная характеристика) и ответвитель с максимально-гладкой характеристикой. В тесной связи с этими задачами находится также вопрос о физически достижимых свойствах направленных систем.

Ниже изложены основные положения указанной теории и некоторые ее приложения.

## 1. ОДНОСТУПЕНЧАТЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТВЕТВИТЕЛЬ

Рассмотрим однородную симметричную связанную линию (рис. 1), уравнения которой, согласно [1], имеют вид

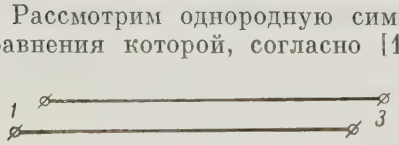



Рис. 1

$$U_1 = U_3 \cos ml + j\,(\rho I_3 + rI_4) \sin ml,$$
$$U_2 = U_4 \cos ml + j\,(rI_3 + \rho I_4) \sin ml,$$
$$I_1 = I_3 \cos ml + j\left(\frac{U_3}{w} - \frac{U_4}{v}\right) \sin ml, \quad (1)$$
$$I_2 = I_4 \cos ml + j\left(\frac{U_4}{w} - \frac{U_3}{v}\right) \sin ml,$$

где $\rho$, $w$ — волновые сопротивления; $r$, $v$ — сопротивления связи по току и напряжению соответственно.

Для такой линии, как известно [1], имеют место соотношения

$$w = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho}, \quad v = \frac{\rho^2 - r^2}{r}, \quad rv = \rho w. \quad (2)$$

Полагаем нагрузочные сопротивления на всех выходах восьмиполюсника одинаковыми, $R = 1$ *ом* и вводим условие идеальной направленности и согласования системы

$$rv = R^2 = 1. \quad (3)$$

При этих условиях волновая матрица передачи одноступенчатой свя-

* Обозначения несколько изменены.

занной линии имеет вид

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Theta + j\rho\sin\Theta & 0 & 0 & -jr\sin\Theta \\ 0 & \cos\theta + j\rho\sin\Theta & -jr\sin\Theta & 0 \\ 0 & jr\sin\Theta & \cos\Theta - j\rho\sin\Theta & 0 \\ jr\sin\Theta & 0 & 0 & \cos\Theta - j\rho\sin\Theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

где $r$ и $\rho$ нормированы ($r \sim r/R$ и $\rho \sim \rho/R$). Из (4) легко найти интересующие нас элементы матрицы рассеяния одной ступени:

$$S_{11} = 0, \quad S_{14} = 0, \quad (5)$$

$$S_{13} = \frac{1}{\cos\Theta + j\rho\sin\Theta}, \quad S_{12} = \frac{jr\sin\Theta}{\cos\Theta + j\rho\sin\Theta}. \quad (6)$$

## 2. МНОГОСТУПЕНЧАТЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТВЕТВИТЕЛЬ

Каскадное включение любого числа однородных связанных линий с уравновешенной связью ($rv = 1$), рассмотренных в предыдущем параграфе, назовем многоступенчатым направленным ответвителем. Такая система идеально направлена и согласована в неограниченном диапазоне частот. Таким образом, если поставлена задача синтеза оптимального многоступенчатого направленного ответвителя, то единственным параметром, требующим оптимизации, является коэффициент деления мощности $\eta$ между плечами *2* и *3* системы:

$$\eta = \frac{|S_{12}|^2}{|S_{13}|^2}. \quad (7)$$

При синтезе этой частотной зависимости необходимо иметь в виду следующее.

1. Коэффициент деления мощности численно равен квадрату модуля элемента $M(T_{41})$ волновой матрицы передачи $[T]$ системы *.

2. Коэффициент деления мощности есть полином по $\cos^2\Theta$ **:

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_2\cos^2\theta + \alpha_4\cos^4\theta + \ldots + \alpha_{2n}\cos^{2n}\theta, \quad (8)$$

где

$$\Theta = ml = 2\pi\frac{l}{\lambda}; \quad (9)$$

— длина ступени; $\alpha_i$ — вещественные постоянные.

Вследствие унитарности матрицы $[S]$

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1, \quad (10)$$

и, следовательно, величина $\eta$ полностью определяет систему. Потребуем, чтобы функция $\eta(\Theta)$ имела вид

$$\eta = \beta^2 - h^2 T_n^2\left(\frac{\cos\Theta}{S}\right), \quad (11)$$

* Элементы матрицы $[T]$ системы обозначены большими буквами латинского алфавита в той же последовательности, как это сделано в формуле (4) для одной ступени.

** См. Приложение 1.

где $\beta$ — постоянная; $h$, $S$ — амплитудный и масштабный коэффициенты;

$$T_n(x) = \cos n \arccos x \tag{12}$$

— полином Чебышева 1-го рода $n$-го порядка. Примерный вид частотной характеристики, соответствующей формуле (11), показан на рис. 2.

Связь между параметрами многоступенчатой системы следует из очевидного условия: при $\Theta = 0$ $\eta = 0$. Тогда из (11) и (12) получаем выражение, определяющее достижимую полосу пропускания многоступенчатой системы:

$$S = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{1}{n} \operatorname{arch} \frac{\beta}{h}}. \tag{13}$$

Таким образом, полоса постоянного деления мощности («полоса пропускания») в направленном ответвителе полностью определяется числом звеньев $n$, номинальным уровнем деления мощности $\beta^2$ и допуском на отклонение от заданного уровня $h^2$.

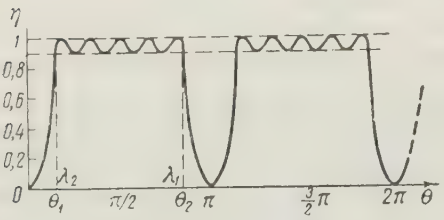



Рис. 2

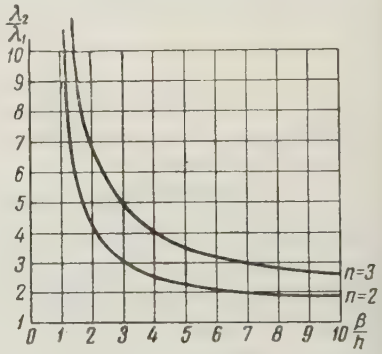



Рис. 3

После того как масштабный коэффициент $S$ найден из (13), коэффициент перекрытия диапазона $\chi$ находим из формулы

$$\chi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\pi - \arccos S}{\arccos S}, \tag{14}$$

где $\lambda_2$ и $\lambda_1$ — длины волн, ограничивающие полосу пропускания системы по заданному допуску. Соотношения (13) и (14) иллюстрируются графиком рис. 3 для $n = 2,3$. Эти кривые ограничивают физически достижимую широкополосность направленного ответвителя с заданными параметрами $n$, $\beta$ и $h$.

Из анализа соотношения (11) следует, что длина одной ступени в системе определяется формулой

$$l = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{15}$$

В ряде случаев представляет интерес многоступенчатый направленный ответвитель с максимально-гладкой частотной характеристикой деления мощности (рис. 4); его характеристику задаем в виде

$$\eta = \beta^2 - \beta^2 \cos^{2n} \Theta \tag{16}$$

(частный случай этой зависимости — простейшая одноступенчатая ($n = 1$) система — рассмотрен в первом параграфе).

Расчет сопротивлений связи ступенек ответвителей обоих указанных типов можно произвести методом неопределенных коэффициентов, подобно тому, как это сделано в [4, 5] для ступенчатых переходов. Расчетные формулы выводятся путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sin^2 \Theta$ в выражении (11) либо (16) и в выражении для этой же функции, определенной путем прямого умножения матриц $[T]$ ступенек

направленного ответвителя. Пояснения даны в Приложении 2. Там же приведены таблицы рассчитанных этим способом значения $r$ для случая двухступенчатого идеально направленного ответвителя с чебышевской характеристикой деления мощности.

## 3. ПРЕДЕЛЬНАЯ МНОГОСТУПЕНЧАТАЯ СИСТЕМА

Выше было показано, что многоступенчатый направленный ответвитель имеет периодическую частотную характеристику (рис. 2 и 4) и, следовательно, полоса пропускания такого ответвителя всегда ограничена как со стороны низких частот, так и со стороны высоких. Могут возникнуть случаи, когда требуется постоянное переходное затухание ответвителя в неограниченном диапазоне частот. Хорошее приближение

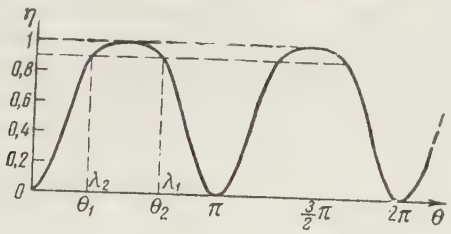



Рис. 4

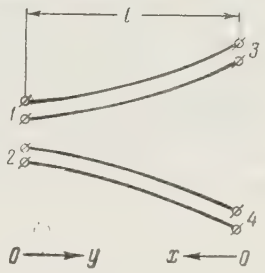



Рис. 5

к такой характеристике получается в случае предельной многоступенчатой системы, иначе говоря, в случае связанных плавно-неоднородных линий. Будем использовать предельное соотношение первого приближения для коэффициента деления мощности слабосвязанных неоднородных линий [6]

$$\eta = S_{12} = jm \int_0^l r(y)\, e^{-j2my}\, dy, \qquad (17)$$

где $r(y)$ — функция распределения связи; $y = l - x$ — координата, отсчитываемая от начала системы (рис. 5). Полагая экспоненциальный закон изменения связи

$$r(y) = r_0 e^{-\alpha y}$$

и выполняя в (17) интегрирование, имеем

$$\eta = r_0 \frac{m^2}{\alpha^2 + (2m)^2} \{1 + e^{-2\alpha l} - 2e^{-\alpha l} \cos 2ml\}. \qquad (18)$$

Типовая характеристика, соответствующая этой формуле, дана на рис. 6. Пунктиром показана предельная кривая (при $l \to \infty$). Из приведенных кривых видно, что полоса пропускания направленного ответвителя в виде связанных плавно-неоднородных линий ограничена лишь со стороны нижних частот. Здесь уместно провести аналогию со ступенчатыми и плавными переходами; если первые имеют периодическую характеристику и их полоса пропускания ограничена с двух сторон, то вторые имеют полосу, ограниченную только со стороны нижних частот. Следует ожидать, что эту аналогию можно продолжить далее; при заданной конечной ширине полосы пропускания ступенчатая система будет всегда короче плавной, подобно тому как это имеет место в обычных неоднородных линиях [6].

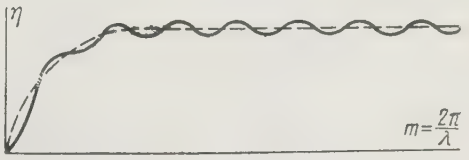



Рис. 6

## ВЫВОДЫ

Современный синтез цепей основан на частотных характеристиках в виде полинома Чебышева, дроби Золотарева и так называемой максимально-гладкой функции. В последние годы эту методику стали широко применять на СВЧ. Особый интерес представляет тот случай, когда аппарат синтеза используется на СВЧ непосредственно без помощи эквивалентных схем — путем соответствующей замены частотной переменной («преобразования частоты»). В этом отношении устройства, состоящие из одинаковых по длине отрезков однородных линий, весьма удобны и успешно используются при синтезе согласующих и фильтрующих устройств [7, 8].

В данной работе указанную методику удалось распространить на ступенчатые связанные линии. Эти устройства, обладая (при рациональном выборе их параметров) идеальной направленностью и согласованием в неограниченной полосе частот, имеют полиномиальную частотную характеристику деления мощности между плечами. Полиномиальная зависимость дает возможность построить синтез направленных ответвителей с чебышевской и максимально-гладкой характеристиками, во многом подобный синтезу ступенчатых переходов и ступенчатых фильтров.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ 1*

Из [9] следует

$$\frac{S_{12}}{S_{13}} = \frac{BI - AM}{F}, \tag{I}$$

но из (4) видно, что для нашего случая

$$I = 0, \ A = F, \tag{II}$$

следовательно,

$$\frac{S_{12}}{S_{13}} = -M, \tag{III}$$

а также

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1.$$

Таким образом, элемент $M$ волновой матрицы передачи полностью определяет деление мощности между плечами *2* и *3*. Исследуем теперь характер частотной зависимости этого элемента. Из (4) очевидно, что при перемножении любого числа таких матриц каждый элемент результирующей матрицы представляет собой сумму произведений следующих членов:

$$jp_q \sin\Theta, \quad \cos\Theta + jp_i \sin\Theta, \tag{IV}$$

т. е. возможны сочетания

$$\sin^n\Theta, \quad \cos^m\Theta, \quad \sin^n\Theta\cos^m\Theta. \tag{V}$$

Нас интересует модуль выражения (III); если

$$\frac{S_{12}}{S_{13}} = x + jy,$$

то

$$\eta = \frac{|S_{12}|^2}{|S_{13}|^2} = x^2 + y^2,$$

т. е. члены типа (V) приобретают вид четных функций

$$\sin^{2n}\Theta, \quad \cos^{2m}\Theta, \quad \sin^{2n}\Theta\cos^{2m}\Theta. \tag{VI}$$

Все синусы и косинусы в четных степенях можно после элементарных преобразований выразить через $\cos^2\Theta$ или $\sin^2\Theta$. Итак, коэффициент деления мощности есть полином по $\cos^2\Theta$:

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_2\cos^2\Theta + \alpha_4\cos^4\Theta + \ldots + \alpha_{2n}\cos^{2n}\Theta. \tag{VII}$$

## *ПРИЛОЖЕНИЕ 2*

Перемножая матрицы двух ступенек, находим

$$M = \alpha \sin^2\Theta + jk \sin\Theta\cos\Theta, \tag{VIII}$$

где приняты обозначения:

$$\alpha = \rho_1 r_2 - \rho_2 r_1; \tag{IX}$$

$$k = r_1 + r_2. \tag{X}$$

Отсюда

$$\eta = |M|^2 = \sin^2\Theta\{k^2 - (k^2 - \alpha^2)\sin^2\Theta\}. \tag{XI}$$

С другой стороны, необходимо

$$\eta = \beta^2 - h^2 T_n^2\left(\frac{\cos\Theta}{S}\right) = \sin^2\Theta\left\{4h^2\left(\frac{2}{S^4} - \frac{1}{S^2}\right) - 4\frac{h^2}{S^4}\sin^2\Theta\right\}. \tag{XII}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sin^2\Theta$ в выражениях (XI) и (XII), получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(r_1 + r_2)^2 = 4h^2\left(\dfrac{2}{S^4} - \dfrac{1}{S^2}\right), & \text{(XIII)}\\ (r_1 + r_2)^2 - (r_2\rho_1 - r_1\rho_2)^2 = 4\dfrac{h^2}{S^4}. & \text{(XIV)}\end{cases}$$

Учитывая, что

$$\rho_1 = \sqrt{1 + r_1^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{1 + r_2^2}, \tag{XV}$$

получаем после преобразований

$$A(r_1 r_2)^2 + 2B(r_1 r_2) - B^2 = 0, \tag{XVI}$$

где

$$A = 4h^2\left(\frac{1}{S^4} - \frac{1}{S^2}\right); \tag{XVII}$$

$$B = \frac{2h^2}{S^4}. \tag{XVIII}$$

Решение уравнения (XVI) дает

$$r_1 = \frac{1}{2}\left\{k + \sqrt{k^2 + 4C\left(1 \overset{(+)}{-} \sqrt{1 + A}\right)}\right\}, \tag{XIX}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left\{k - \sqrt{k^2 + 4C\left(1 \overset{(+)}{-} \sqrt{1 + A}\right)}\right\}, \tag{XX}$$

где

$$C = \frac{B}{A} = \frac{1}{2(S^2 - 1)}.$$

| Допуск на переходное затухание, $\delta$, *дб* | Сопротивления связи | | Коэффициент перекрытия, $\lambda_2/\lambda_1$ |
|---|---|---|---|
| | $r_1$ | $r_2$ | |
| 0,1 | 1,3290 | 0,2311 | 2,3461 |
| 0,2 | 1,3515 | 0,2609 | 2,7790 |
| 0,3 | 1,3677 | 0,2911 | 3,2137 |
| 0,5 | 1,3796 | 0,3235 | 3,6897 |
| 1,0 | 1,3913 | 0,3970 | 4,8500 |

Приводим таблицу значений $r_1$ и $r_2$ для двухступенчатого чебышевского направленного ответвителя с равным делением мощности между плечами *2* и *3* ($\eta_0 = 1$, переходное затухание $L_0 = 3$ *дб*).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Пистолькорс, Антенны, Связьиздат, 1947.
2. А. Р. Вольперт, Теоретическое и экспериментальное исследование фидерного рефлектометра, Радиотехника, 1941, **2**, 2, 31,3.
3. J. G. K. Shimizy. Trippled directional couplers, IRE Wescon Convention Record, 1957, august, part I, 4.
4. Р. Коллен, Теория и расчет широкополосных многосекционных четвертьволновых трансформаторов, Сб. Вопр. радиолокационной техники, ИЛ, 1955, 5(29), 88.
5. А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, Инженерный расчет чебышевских ступенчатых переходов, Радиотехника, 1 60, **15**, 1, 3.
6. А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, К сравнению ступенчатых и плавных переходов, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 3, 527.
7. Н. Рибле, Общий синтез четвертьволновых трансформаторов полного сопротивления, Сб. Вопр. радиолокационной техники, ИЛ, 1957, 4 (40), 3.
8. А. Л. Фельдштейн, Синтез ступенчатых фильтров, Вопросы радиоэлектроники, серия XII, 1959, 19, 40.
9. Б. Б. Лаговьер, Расчет сложных волноводных систем с помощью теории восьмиполюсников, Сб. Электроника, 1958, 6, 64.

Поступила в редакцию
9 VI 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 2

# ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЗАТУХАНИЯ В ВОЛНОВОДАХ

*Ю. Н. Казанцев*

Предложен метод измерения затуханий в волноводных элементах путем определения коэффициента стоячей волны в волноводе перед резонатором, образованным измеряемым образцом, диафрагмой и короткозамыкающим поршнем, при резонансе. Приведены схемы установок для измерения затухания волны $H_{01}$ в волноводах круглого сечения, а также формулы для оценки погрешности.

## 1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Для измерения затухания в относительно коротких отрезках волноводов обычно используется метод резонансного объема. Сущность его заключается в том, что измеряется добротность резонатора, образованного исследуемым отрезком волновода и двумя металлическими торцовыми поверхностями; найденная добротность затем пересчитывается с учетом затухания в торцовых частях на линейное затухание в образце.

Методы определения добротности на сверхвысоких частотах можно разделить на два класса: а) методы определения добротности по продолжительности свободных колебаний; б) методы определения добротности по ширине резонансной кривой.

Метод определения добротности по продолжительности свободных колебаний, описанный в [1], удобен для систем с очень высокой добротностью; при уменьшении добротности погрешность измерения сильно увеличивается.

Методы определения добротности по ширине резонансной кривой являются наиболее распространенными в технике сверхвысоких частот [2, 3]. Однако в ряде случаев они оказываются неудобными из-за высоких требований к стабильности частоты генератора.

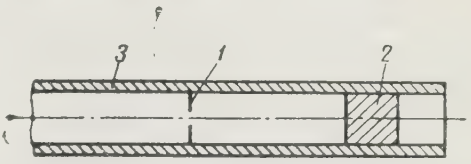


Рис. 1. Диафрагма и поршень в волноводе

Описанный ниже метод позволяет измерять весьма широкий диапазон величин затуханий с применением несложной аппаратуры; при этом высокие требования к стабильности частоты генератора не предъявляются. Затухание в образце определяется по относительной мощности, поглощаемой в резонаторе при настройке его в резонанс.

Определим, как связана величина этой мощности с параметрами резонатора. Для этого рассмотрим объем, образованный диафрагмой *1* и короткозамыкающим поршнем *2*, помещенными в волновод *3*, согласованный с генератором (рис. 1).

Диафрагма должна пропускать волну данного типа, не возбуждая волн других, нежелательных типов.

Поле в резонаторе в режиме, близком к резонансу, можно рассматривать как сумму двух бегущих навстречу друг другу волн с равными амплитудами. В работе [4] методом суперпозиции волн, многократно отраженных от торцов, найдено выражение для амплитуды этих волн. На резонансной частоте это выражение после преобразований приобре-

тает вид

$$u = \frac{2A}{\eta_п}, \tag{1}$$

где $A$ — амплитуда поля бегущей волны справа от диафрагмы в случае, если вместо короткозамыкающего поршня включена согласованная нагрузка; $\eta_п \ll 1$ — величина, показывающая, какая часть мощности теряется при двойном пробеге волны в резонаторе (величина $\eta_п$ учитывает как тепловые потери, так и потери на излучение в волновод).

Прежде чем привести формулу, определяющую мощность, поглощаемую в резонаторе, поясним физический смысл некоторых величин. Если обозначить мощность падающей волны через $P_1$ и коэффициент передачи диафрагмы — через $\eta_1$, то произведение $P_1\eta_1$ представляет собой мощность волны, прошедшей через диафрагму в режиме бегущей волны (диафрагма помещена в волновод, согласованный с генератором и нагрузкой); отношение $u/A$ показывает, во сколько раз возросла амплитуда волны в резонаторе в результате многократных отражений от торцов; разность $\eta_п - \eta_1$ определяет тепловые потери в резонаторе за двойной пробег.

Теперь легко видеть, что мощность $P$, поглощаемая в резонаторе, определяется формулой

$$P = P_1\eta_1\left(\frac{u}{A}\right)^2(\eta_п - \eta_1). \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1), получим

$$P = 4P_1\eta_1\frac{\eta_п - \eta_1}{\eta_п^2}. \tag{3}$$

Полагая в уравнении (3) $P = P_1$, найдем условие полного поглощения мощности волны, падающей на резонатор из волновода:

$$\frac{\eta_1}{\eta_п} = 0{,}5. \tag{4}$$

Из того же уравнения (3) легко выразить величину тепловых потерь

$$\eta = \eta_п - \eta_1 \tag{5}$$

через величину коэффициента передачи диафрагмы $\eta_1$ и относительную мощность $p = P/P_1$, поглощаемую в резонаторе:

$$\eta = \eta_1\left[\left(\frac{2}{p} - 1\right) \pm \frac{2}{p}\sqrt{1-p}\right]. \tag{6}$$

Выражение (6) можно представить в более простой форме, выразив величину $p$ через коэффициент стоячей волны $\rho$ в волноводе перед резонатором. Так как $p = 1 - k^2$ ($k$ — модуль коэффициента отражения от резонатора) и $\rho = (1+k)/(1-k)$, то

$$\eta = \eta_1\rho \tag{7'}$$

при $\eta > \eta_1$ (знак + в уравнении (6)) и

$$\eta = \eta_1/\rho \tag{7''}$$

при $\eta < \eta_1$ (знак — в уравнении (6)).

Из формул (7) видно, что для определения величины $\eta$ достаточно знать коэффициент передачи диафрагмы в режиме бегущей волны, а также коэффициент стоячей волны перед резонатором при резонансе. Величина $\eta$ включает в себя потери в боковых стенках резонатора $\eta_{ст}$, потери в поршне $\eta_{т1}$ и диафрагме $\eta_{т2}$ за двойной пробег волны в резонаторе [4]:

$$\eta = \eta_{ст} + \eta_{т1} + \eta_{т2}. \tag{8}$$

Основной частью установки для измерения затуханий является резонатор, который состоит из двух торцевых частей, включающих в себя диафрагму, поршень и отрезок волновода, на длине которого откладывается одна-две полуволны. В разъем резонатора может включаться испытуемый образец, имеющий длину, равную $n\frac{\lambda_в}{2}$, где $n$ — целое число; а $\lambda_в$ — длина волны в волноводе.

Число $\eta$ находится для двух случаев: а) образец включен ($\eta_в$), б) образец отсутствует ($\eta_0$); тогда потери за двойной пробег в образце определяется как разность $\eta_в$ и $\eta_0$ *:

$$\eta_{обр} = \eta_в - \eta_0. \tag{9}$$

Учитывая формулы (7) и (9), можно написать следующие выражения для затухания в образце (в децибелах):

$$\begin{aligned}
\eta_{обр} &= 2{,}17\,\eta_1(\rho - \rho_0) && \text{при } \eta_1 < \eta_0 < \eta_в,\\
\eta_{обр} &= \frac{2{,}17\,\eta_1(\rho_0 - \rho)}{\rho\rho_0} && \text{при } \eta_1 > \eta_в > \eta_0,\\
\eta_{обр} &= \frac{2{,}17\,\eta_1(\rho\rho_0 - 1)}{\rho_0} && \text{при } \eta_0 < \eta_1 < \eta_в,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\rho$ и $\rho_0$ — коэффициенты стоячей волны перед резонатором с включенным образцом и без образца соответственно. Эти выражения аналогично исходной формуле (1) справедливы при условии $\eta_п = \eta_{обр} + \eta_0 + \eta_1 \ll 1$, которое обычно легко удовлетворяется.

Из уравнений (10) легко получить формулы для вычисления полной относительной погрешности измерения:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\eta_{обр}}{\eta_{обр}} &= \frac{\Delta\eta_1}{\eta_1} + \frac{\Delta\rho}{\rho - \rho_0} + \frac{\Delta\rho}{\rho - \rho_0} && \text{при } \eta_1 < \eta_0 < \eta_в,\\
\frac{\Delta\eta_{обр}}{\eta_{обр}} &= \frac{\Delta\eta_1}{\eta_1} + \frac{\rho_0\Delta\rho}{\rho(\rho_0 - \rho)} + \frac{\rho\Delta\rho_0}{\rho_0(\rho_0 - \rho)} && \text{при } \eta_1 > \eta_в > \eta_0,\\
\frac{\Delta\eta_{обр}}{\eta_{обр}} &= \frac{\Delta\eta_1}{\eta_1} + \frac{\rho_0\Delta\rho}{\rho\rho_0 - 1} + \frac{\Delta\rho_0}{\rho_0(\rho\rho_0 - 1)} && \text{при } \eta_0 < \eta_1 < \eta_в.
\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что случай $\eta_0 < \eta_1 < \eta_в$ соответствует наибольшему диапазону измеряемых затуханий при одном и том же максимальном коэффициенте стоячей волны.

Ниже описаны два варианта установки для измерения затухания волны $H_{01}$ в волноводах круглого сечения.

## 2. ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Вариант 1. Индикация осуществляется при помощи направленного ответвителя в волноводе круглого сечения.

Блок-схема измерительной установки приведена на рис. 2, *а*. Сигнал с генератора на клистроне *1*, промодулированный напряжением пилообразной формы, через развязывающие ослабители *3*, *3'* и калиброванный ослабитель *2* подается на возбудитель волны $H_{01}$ в волноводе круглого сечения *4* [5, 6].

---

* Если длина образца значительно отличается от $n\frac{\lambda_в}{2}$, то в результаты измерения вносится дополнительная погрешность, которая становится весьма малой при условии $n \gg 1$.

Волна $H_{01}$, прошедшая через спиральный фильтр *5*, направленный ответвитель обратной волны в волноводе круглого сечения *6* [7,8] и раздвижное сочленение *7*, падает на диафрагму *8* с системой отверстий.

Диафрагма возбуждает резонатор, в который включен измеряемый образец *9*. Часть мощности обратной волны с детектора *11* подается на осциллограф *12*. При настройке резонатора при помощи поршня *10* на зоне клистрона, воспроизведенной на экране осциллографа, появляется

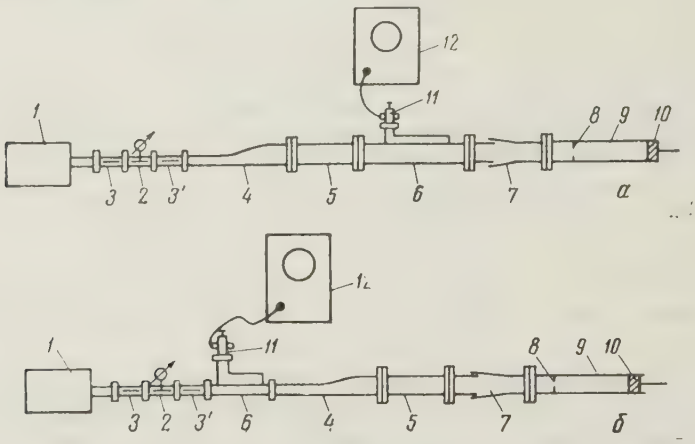



Рис. 2. Блок-схемы измерительных установок:
*а* — первый вариант; *б* — второй вариант

провал (рис. 3, *а*). Сравнивая при помощи калиброванного ослабителя *2* высоту зоны с уровнем провала, легко определить коэффициент стоячей волны в круглом волноводе перед диафрагмой *.

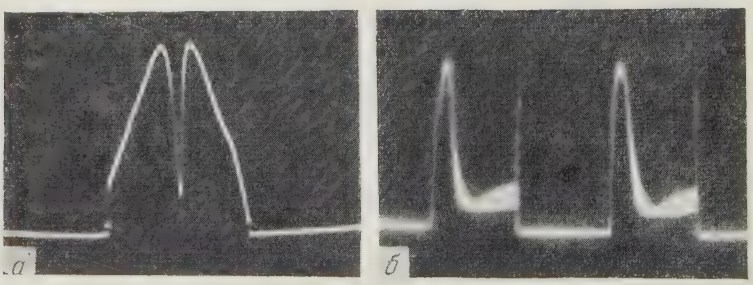



Рис. 3. Осциллограммы настройки

Вариант 2. Индикация осуществляется при помощи направленного ответвителя в прямоугольном волноводе.

Блок-схема измерительной установки, выполненной по этому варианту, приведена на рис. 2, *б*. В этом варианте направленный ответвитель обратной волны в прямоугольном волноводе включен перед возбудителем волны $H_{01}$.

Вариант 2 проще в осуществлении, так как не требуется направленный ответвитель в волноводе круглого сечения, но точность измерений, как показано ниже, меньше, чем в варианте 1.

* Практически сигнал клистрона целесообразно модулировать импульсами прямоугольной формы. Тогда при резонансе из-за паразитной частотной модуляции «проваливается» только часть импульса (рис. 3, *б*).

### 3. ИЗМЕРЕНИЕ ЗАТУХАНИЙ В ВОЛНОВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Описанным выше методом измерялось затухание как в прямолинейных, так и в изогнутых образцах. Определялось затухание волны $H_{01}$ в периодических (кольцевых и спиральных) волноводах с диэлектрической и металлической оболочками [9, 10]. Исследовалось также затухание волны $H_{01}$ в изогнутых секциях этих волноводов [11].

Остановимся несколько подробнее на процессе измерения. Как уже было сказано, затухание в резонаторе за двойной пробег волны определяется через коэффициент стоячей волны в волноводе перед диафрагмой в режиме настройки в резонанс. Коэффициент стоячей волны измеряется путем сравнения высоты импульса на экране осциллографа с уровнем провала. Из-за наличия отражений от возбудителя $H_{01}$ и ослабителей, а также благодаря тому, что ответвитель обратной волны имеет конечный коэффициент направленности, высота как самого импульса, так и провала при перемещении диафрагмы с резонатором при помощи раздвижного сочленения также изменяется.

Рассмотрим влияние перечисленных факторов на результаты измерения коэффициента стоячей волны (ксв) или коэффициента отражения от резонатора для обоих вариантов измерительной установки. Так как ксв можно легко выразить через коэффициент отражения, то в дальнейшем рассуждения будем вести применительно к коэффициенту отражения $k$.

В схеме, приведенной на рис. 2, *а*, мощность волны, падающей на детектор в направленном ответвителе, будет изменяться при перемещении диафрагмы от

$$A' = B(k^2 + \delta_1) \tag{12'}$$

до

$$A'' = B(k^2 - \delta_1), \tag{12''}$$

где $B_в$ — некоторая величина, постоянная для данной установки, а $\delta_1$ зависит от коэффициентов отражения от резонатора и возбудителя со стороны волновода круглого сечения, а также от коэффициента направленности ответвителя.

Соотношения (12) справедливы, когда

$$k_в \ll 1, \quad k_н \ll k, \tag{13}$$

где $k_в$ — модуль коэффициента отражения от возбудителя; $k_н$ — коэффициент направленности ответвителя по напряженности *.

Если учесть, что в отсутствие резонанса от диафрагмы отражается практически вся мощность и, следовательно, абсолютное значение коэффициента отражения равно единице, то в случае резонанса модуль соответствующего коэффициента отражения $k$ равен:

$$k = \sqrt{\frac{A' + A''}{A_0' + A_0''}}, \tag{14}$$

где $A'$ и $A''$ — максимальное и минимальное значение мощности обратной волны, падающей при резонансе на детектор в направленном ответвителе; $A_0'$ и $A_0''$ — соответствующие величины в отсутствие резонанса.

Из формулы (14) видно, что для определения коэффициента отражения достаточно сравнить друг с другом величины $A'$, $A''$ (уровни провала); $A_0'$, $A_0''$ (уровни импульса). Как было сказано выше, это сравнение производится при помощи точно прокалиброванного ослабителя.

---

* Под $k_в$ понимается абсолютное значение полного коэффициента отражения, обусловленного как наличием возбудителя, так и неполным согласованием с линией развязывающего ослабителя (3′); $k_н$ берется с учетом коэффициента отражения от поглощающей насадки направленного ответвителя.

В схеме, приведенной на рис. 2, *б*, коэффициент отражения от диафрагмы в круглом волноводе при резонансе определяется путем сравнения отраженных волн в прямоугольном волноводе до возбудителя $H_{01}$ как при резонансе, так и в его отсутствие.

Мощность волны, падающей на детектор в направленном ответвителе, при перемещении диафрагмы будет изменяться от

$$C' = D(k^2 + \delta_2) \qquad (15')$$

до

$$C'' = D(k^2 - \delta_2), \qquad (15'')$$

где $D$ — некоторая величина, постоянная для данной установки; $\delta_2$ зависит от коэффициентов отражения от резонатора и развязывающего ослабителя, а также от коэффициента направленности ответвителя и характеристик возбудителя волны $H_{01}$.

Соотношения (15) справедливы, когда

$$s_{11} \ll s_{12}^2 k, \quad s_{22} \ll 1, \quad k_{\text{п}} \ll s_{12}^2 k, \quad k_{\text{а}} \ll 1, \qquad (16)$$

где $s_{11}$, $s_{22}$ и $s_{12}$ — элементы матрицы рассеяния соединения возбудитель — фильтр [12]; $k_{\text{а}}$ — модуль коэффициента отражения от развязывающего ослабителя.

Если учесть, что в отсутствие резонанса от диафрагмы отражается практически вся мощность, то на основании уравнений (15) можно написать следующее выражение для модуля коэффициента отражения от резонатора при резонансе:

$$k = \sqrt{\frac{C' + C''}{C_0' + C_0''}}, \qquad (17)$$

где $C'$ и $C''$ — максимальное и минимальное значения мощности обратной волны, падающей на детектор в направленном ответвителе при резонансе; $C_0'$ и $C_0''$ — соответствующие величины в отсутствие резонанса.

Сравнивая при помощи калиброванного ослабителя величины $C'$, $C''$, $C_0'$ и $C_0''$, на основании формулы (17) можно легко найти коэффициент отражения.

Так как условиям (16) удовлетворить труднее, чем аналогичным условиям (13), то, следовательно, и точность определения коэффициента отражения для второго варианта будет меньше, чем для первого.

## 4. ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ДИАФРАГМУ И ДЛИНЫ ОБРАЗЦА

Из формул (7), (9) и (10) видно, что ксв ($\rho$ и $\rho_0$) зависят от величины потерь в образце и торцовых частях, а также от коэффициента передачи диафрагмы. Минимальная величина ксв должна удовлетворять условиям (13) или (16), а максимальная для обеспечения удобства измерений — не превышать 5—6. Рассмотрим последовательность операций при выборе коэффициента передачи через диафрагму и длины образца, например, для случая $\eta_0 < \eta_1 < \eta_{\text{в}}$. Сначала собирают резонатор без образца и, постепенно увеличивая коэффициент передачи диафрагмы, измеряют описанным выше способом ксв перед резонатором. Типичная зависимость ксв $\rho_0$ от коэффициента передачи диафрагмы для случая $\eta_0 = 0{,}002$ приведена на рис. 4. Из этого графика видно, что с увеличением коэффици-

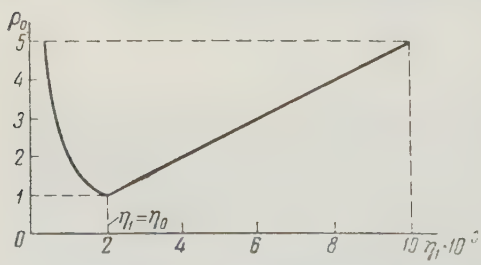



Рис. 4. Зависимость коэффициента стоячей волны от коэффициента передачи диафрагмы

ента передачи ксв вначале уменьшается и, достигнув единицы, начинает опять возрастать.

Коэффициент передачи $\eta_1$ следует выбирать так, чтобы величина $\rho_0$ была максимально допустимой (правая ветвь кривой на рис. 4).

Длина образца определяется из условия, чтобы ксв перед резонатором с включенным образцом был того же порядка, что и без образца (при постепенном увеличении длины образца, для выбранного коэффициента передачи $\eta_1$, ксв будет вначале уменьшаться и, достигнув единицы, начнет снова возрастать).

На практике часто встречается случай, когда длина образца задана и нет возможности изменять ее; тогда коэффициент передачи диафрагмы и начальное затухание в торцовых частях $\eta_0$ выбираются так, чтобы величина ксв, не превышая 5—6, удовлетворяла условиям (13) или (16).

## 5. ДИАФРАГМА И ЕЕ ГРАДУИРОВКА

Диафрагма представляет собой тонкую перегородку в волноводе с одним (рис. 5, *а*) или несколькими (рис. 5, *б*, *в*) отверстиями. Число круглых отверстий или щелей выбрано так, чтобы при падении на диафрагму волны $H_{01}$ в резонаторе не возбуждались бы несимметричные волны. Однако такие диафрагмы могут возбуждать в резонаторе не только волну $H_{01}$, но и симметричные магнитные волны более высокого порядка. Поэтому диафрагмы *а* и *b* применимы, если в измеряемом волноводе может распространяться единственная симметричная магнитная волна $H_{01}$ ($Ka < 7{,}02$), а диафрагма *б* — еще и в том случае, когда в волноводе помимо волны $H_{01}$ может распространяться симметричная магнитная волна второго порядка — $H_{02}$ ($Ka < 10{,}2$); отверстия связи располагаются на окружности, где токи, наводимые волной $H_{02}$, равны нулю. Здесь $K$ — постоянная распространения в свободном пространстве; $a$ — радиус волновода.

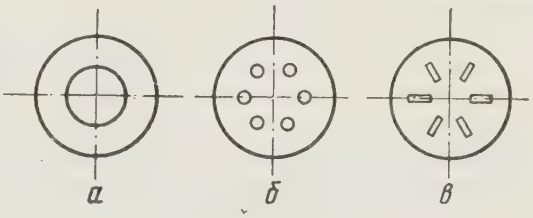



Рис. 5. Диафрагмы различного вида

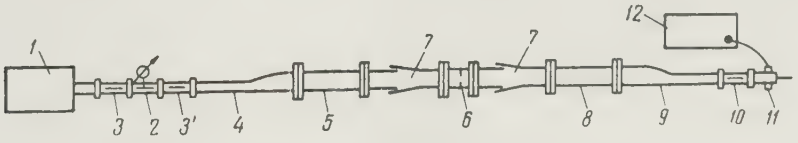



Рис. 6. Блок-схема для градуировки диафрагмы

Градуировка диафрагмы заключается в определении коэффициента передачи $\eta_1$ в диапазоне частот. Блок-схема градуировки приведена на рис. 6. Сигнал с генератора на клистроне *1*, промодулированный импульсами прямоугольной формы, через развязывающие ослабители *3*, *3'* и калиброванный ослабитель *2* подается на возбудитель волны $H_{01}$ в круглом волноводе *4*. Волна $H_{01}$, прошедшая спиральный фильтр *5*, падает на диафрагму *6*, по обе стороны которой расположены раздвижные сочленения *7*, позволяющие исключить отражение от генераторной и приемной частей установки. Далее через спиральный фильтр *8*, второй возбудитель *9* и развязывающий ослабитель *10* сигнал попадает на детектор *11* и затем на измерительный усилитель *12*.

Коэффициент передачи через диафрагму определяется путем сравнения двух уровней сигнала, снимаемого с детектора *11*, при наличии диафрагмы и в ее отсутствие. Легко видеть, что отражения от обоих возбудителей внесут погрешность в определение коэффициента передачи.

Для исключения этой погрешности используются раздвижные сочленения 7. При изменении расстояния от сечения, в котором включена диафрагма, до возбудителей волны $H_{01}$ амплитуда волны, падающей на детектор *11*, изменяется от

$$u_{\text{макс}} = \frac{A}{1 - k_1 k_2} \quad \text{до} \quad u_{\text{мин}} = \frac{A}{1 + k_1 k_2} \tag{18'}$$

в отсутствие диафрагмы и от

$$u_{\text{д макс}} = \frac{A\sqrt{\eta_2}}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2} \quad \text{до} \quad u_{\text{д мин}} = \frac{A\sqrt{\eta_1}}{1 + k_1 + k_2 + k_1 k_2} \tag{18''}$$

при наличии диафрагмы, где $A$ — некоторая постоянная величина; $k_1 \ll 1$ и $k_2 \ll 1$ — абсолютные значения коэффициентов отражения от возбудителей *.

На основании выражений (18), пренебрегая величинами второго порядка малости, можно написать следующую формулу для коэффициента передачи диафрагмы:

$$\eta = \frac{1}{4}\left(\frac{u_{\text{д макс}}}{u_{\substack{\text{макс} \\ \text{мин}}}} + \frac{u_{\text{д мин}}}{u_{\substack{\text{макс} \\ \text{мин}}}}\right)^2. \tag{19}$$

Таким образом, для определения коэффициента передачи достаточно сравнить амплитуды $u_{\text{д макс}}$ и $u_{\text{д мин}}$ с $u_{\text{макс}} \simeq u_{\text{мин}}$; это сравнение производится при помощи калиброванного ослабителя.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод измерения затухания позволяет создать измерительные установки весьма простой конструкции. При пользовании этим методом не приходится измерять ширину резонансной кривой, что исключает требования высокой стабильности частоты генератора, линейности развертки осциллографа и т. д. Несмотря на то, что выше описаны только установки для испытания волноводных элементов круглого сечения, предложенным способом можно измерять потери и в волноводах других поперечных сечений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Хайкин, Измерения поверхностного сопротивления сверхпроводящего олова на частоте 9380 *Мгц*, Докл. АН СССР, 1950, **75**, 5, 661.
2. В. М. Вахнин, Т. Ф. Колодина, Установка для измерения затухания волны $H_{01}$ в коротких отрезках волноводов методом резонансного объема, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 12, 1485.
3. Измерения на сверхвысоких частотах, Изд. Советское радио, 1952.
4. Ю. Н. Казанцев, Расчет полых резонаторов методом суперпозиции электромагнитных волн, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 9, 1480.
5. Дж. К. Саутворт, Принципы и применения волноводной передачи, Изд. Советское радио, 1955.
6. Ю. М. Исаенко, Плавный возбудитель волны $H_{01}$ в круглом волноводе, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 8, 1398.
7. М. В. Персиков, Направленный ответвитель для волны $H_{01}$ в волноводе круглого сечения, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 1, 65.

* Под $k_1$ и $k_2$ подразумеваются абсолютные значения полных коэффициентов отражения со стороны круглого волновода, обусловленные как наличием возбудителей $H_{01}$, так и неполным согласованием развязывающих ослабителей *3'* и *10* с линией.

8. S. E. Miller, Coupled wave theory and waveguide applications, Bell System Techn. J., 1954, **33**, 3, 661.
9. Ю. Н. Казанцев, В. В. Мериакри, Измерение затуханий в кольцевых волноводах, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 131.
10. Ю. Н. Казанцев, Ю. И. Казначеев, В. В. Мериакри, Исследование спиральных волноводов, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 11, 1816.
11. Ю. Н. Казанцев, В. В. Мериакри, Передача волны $H_{01}$ через изгиб с малым радиусом кривизны, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 133.
12. Дж. Сторер, Л. Шейнгольд, С. Штейн. Простой графический анализ волноводного соединения с двумя выводами, Сб. Вопр. радиолокационной техники, 1954, 4, 109.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
7 VII 1959
После исправлений
11 II 1960

1961 № 2

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОГЛАСОВАНИЯ ТРАКТА СВЧ В РАДИОСПЕКТРОСКОПАХ

*В. И. Муромцев, А. К. Пискунов*

Рассмотрены особенности согласования тракта СВЧ радиоспектроскопа с отражательным резонатором. Проанализированы возможные нелинейные искажения формы сигнала парамагнитного поглощения, возникающие при определенных условиях согласования резонатора с волноводным трактом. Оценено влияние сигнала дисперсии на форму сигнала поглощения.

## ВВЕДЕНИЕ

Анализ работы радиоспектроскопов различных типов изложен в [1—3]. В [1] подробно рассмотрены основные причины, ограничивающие чувствительность спектроскопов, определены оптимальные условия согласования тракта СВЧ с резонатором. Теория простого и супергетеродинного спектроскопов и влияние дисперсии на наблюдаемую форму сигнала парамагнитного поглощения в проходном резонаторе впервые обсуждены в [3].

В настоящей статье дан детальный анализ некоторых особенностей согласования тракта СВЧ спектроскопов с отражательным резонатором, возможных нелинейных искажений формы сигнала, а также оценено влияние сигнала дисперсии на форму сигнала поглощения.

Для повышения чувствительности спектроскопа необходимо согласовать волноводный тракт СВЧ с резонатором. Оптимальное условие согласования зависит не только от типа спектроскопа и характеристики детектора, но и от собственных шумов генератора, коэффициента шумов усилителя и температуры шумов детектора или преобразователя.

Наиболее важно знать условия оптимального согласования с точки зрения получения максимального отношения сигнал/шум. В качестве первого грубого приближения часто оказывается полезным знание условия оптимального согласования, при котором на выходе системы получается максимальный сигнал. Расчет условий согласования основывается на предположении, что волноводный тракт с резонатором описывается эквивалентной длинной линией без потерь с волновым сопротивлением $R_0$, нагруженной на сосредоточенное комплексное сопротивление $Z_н$.

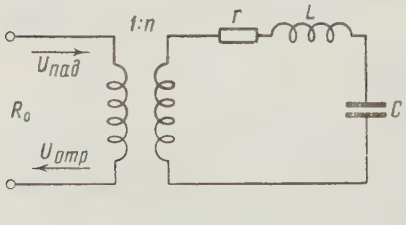



Рис. 1. Эквивалентная схема волноводного тракта с резонатором

Резонатор представляется эквивалентным контуром и характеризуется эквивалентным сопротивлением потерь $r$, добротностью $Q_0$ и резонансной частотой $f_0$. Связь резонатора с трактом описывается идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации $n$.

Сосредоточенное сопротивление $Z_н$, нагружающее длинную линию, определяется как входное сопротивление эквивалентной схемы, показанной на рис. 1.

Коэффициент отражения Г определяется выражением

$$\Gamma = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}} = \frac{Z_{\text{н}} - R_0}{Z_{\text{н}} + R_0}, \tag{1}$$

где $U_{\text{отр}}$ — амплитуда отраженной волны; $U_{\text{пад}}$ — амплитуда падающей волны.

При наблюдении сигнала поглощения резонатор настроен на частоту генератора. В этом случае сопротивление нагрузки $Z_{\text{н}}$ длинной линии будет активным и равным

$$Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} = \frac{r}{n^2}. \tag{2}$$

Коэффициент отражения Г при настройке резонатора на частоту генератора определяется соотношением

$$\Gamma_{\text{р}} = \frac{r - R_0 n^2}{r + R_0 n^2}. \tag{3}$$

Парамагнитное поглощение мощности СВЧ вызывает дополнительные потери в резонаторе, что равносильно увеличению эквивалентного сопротивления $r$, характеризующего потери, на величину $\Delta r$.

В результате изменения потерь изменится величина амплитуды отраженной волны. Из формул (1) и (3) следует, что

$$U_{\text{отр}} = \frac{r - R_0 n^2}{r + R_0 n^2} U_{\text{пад}} \tag{4}$$

или

$$U_{\text{отр}} = f(r,\ n). \tag{5}$$

Предполагая парамагнитные потери малыми, величину изменения амплитуды отраженной волны можно записать в виде

$$\Delta U_{\text{отр}} = \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r$$

или

$$\Delta U_{\text{отр}} = 2 \frac{R_0 n^2}{(R_0 n^2 + r)^2} \Delta r U_{\text{пад}}. \tag{6}$$

Как следует из (6), при одной и той же величине парамагнитного поглощения ($\Delta r$) изменение амплитуды отраженной волны зависит от коэффициента трансформации $n^2$.

Величина сигнала $\Delta U_{\text{отр}}$ будет максимальной при условии

$$\frac{R_0 n^2}{r} = 1 \tag{7}$$

и определяется выражением

$$\Delta U_{\text{отр}} = \frac{1}{2} U_{\text{пад}} \frac{\Delta r}{r}. \tag{8}$$

Практически более удобно представить $\Delta U_{\text{отр}}$ и условие оптимальной связи (7) в зависимости от $\Gamma_{\text{р}}$. Заменяя в (6) $R_0 n^2$ через коэффициент отражения $\Gamma_{\text{р}}$, из (3) получим

$$\Delta U_{\text{отр}} = \frac{1}{2} U_{\text{пад}} (1 - \Gamma_{\text{р}}^2) \frac{\Delta r}{r}. \tag{9}$$

Соотношение (7), определяющее условие, при котором величина изменения амплитуды отраженной волны будет максимальной, запишется в виде

$$\Gamma_{\text{р}} = 0. \tag{10}$$

Условие (10) определяет оптимальную связь при наблюдении сигнала поглощения в отражательном спектроскопе с линейным детектированием.

## 1. СОГЛАСОВАНИЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ДЕТЕКТИРОВАНИИ

Известно, что условие согласования, при котором обеспечивается максимальный сигнал на выходе, зависит от характеристики детектора. В общем случае выбор условия согласования зависит еще и от уровня мощности, падающей на резонатор.

Определим условие оптимального согласования при квадратичном детектировании в схеме отражательного типа при наблюдении сигнала поглощения.

В спектроскопическом случае сигналом ЭПР является изменение амплитуды несущей СВЧ. Напряжение, приложенное к детектору, равно

$$U_{\text{пад}} = (U_{\text{отр}} + \Delta U_{\text{с}}) \cos \omega t, \tag{11}$$

где $U_{\text{отр}}$ — амплитуда несущей; $\Delta U_{\text{с}}$ — изменение амплитуды напряжения СВЧ, обусловленное парамагнитным поглощением. Выражение для составляющей сигнала после квадратичного детектора имеет вид

$$I_{\text{с}} = \alpha \overline{[(U_{\text{отр}} + \Delta U_{\text{с}}) \cos \omega t]^2} = \alpha U_{\text{отр}} \Delta U_{\text{с}}. \tag{12}$$

Таким образом, величина сигнала на выходе пропорциональна амплитуде несущей $U_{\text{отр}}$ и величине сигнала $\Delta U_{\text{с}}$ на входе. Здесь для увеличения коэффициента передачи детектора при том же сигнале $\Delta U_{\text{с}}$ следует увеличить амплитуду несущей. Спектроскопы, в которых для увеличения коэффициента передачи детектора искусственно увеличивают уровень несущей, описаны, например, в [2]. Для спектроскопа с отражательным резонатором с учетом формул (1) и (9) имеем

$$U_{\text{отр}} = \Gamma_{\text{р}} U_{\text{пад}},$$

$$\Delta U_{\text{с}} = \Delta U_{\text{отр}} = (1 - \Gamma_{\text{р}}^2) U_{\text{пад}} \frac{\Delta r}{2r}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим зависимость сигнала на выходе от коэффициента отражения $\Gamma_{\text{р}}$:

$$I_{\text{с}} = \text{const}\, \Gamma_{\text{р}} (1 - \Gamma_{\text{р}}^2) U_{\text{пад}}^2. \tag{14}$$

Анализ (14) показывает, что при условии

$$\Gamma_{\text{р}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{15}$$

величина сигнала на выходе будет максимальной. Положительный знак перед $\Gamma_{\text{р}}$ соответствует связи, ниже критической, отрицательный — связи, выше критической. При квадратичном преобразовании сигнал на выходе пропорционален квадрату напряжения $U_{\text{пад}}^2$, т. е. мощности, падающей на резонатор. В спектроскопах, где применяются кристаллические детекторы, условие оптимального согласования (15) справедливо для мощностей не более долей милливатта. При бóльших мощностях формулы (14) и (15) неприменимы.

Заметим, что при $|\Gamma_{\text{р}}|$, меньших оптимального, уменьшение сигнала на выходе обусловлено уменьшением коэффициента передачи детектора, а при значениях $|\Gamma_{\text{р}}|$, бóльших оптимального, уменьшение сигнала на выходе связано с уменьшением сигнала поглощения $\Delta U_{\text{с}}$, которое вызвано уменьшением мощности СВЧ, проходящей в резонатор. Согласование, обеспечивающее максимальную чувствительность спектроскопа, отлично от условия (15), что отмечено в [3].

Результаты проведенного рассмотрения кратко можно сформулировать следующим образом.

1. Оптимальное условие согласования при квадратичном детектировании определяется выражением (15).

2. Для идеального квадратичного преобразования оптимальные условия согласования не зависят от уровня мощности, падающей на резонатор.

3. Сигнал на выходе квадратичного детектора пропорционален мощности, падающей на резонатор.

## 2. СОГЛАСОВАНИЕ В ПРОСТОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОМ СПЕКТРОСКОПЕ ПРИ СРЕДНИХ И БОЛЬШИХ УРОВНЯХ МОЩНОСТИ

В простом спектроскопе при работе с ненасыщающимися образцами для увеличения чувствительности следует повышать уровень мощности генератора. При мощностях порядка нескольких милливатт в зависимости от $\Gamma_р$ детектор может работать как в квадратичной, так и в линейной области. Рассмотрим, как в этом случае следует выбирать коэффициент отражения $\Gamma_р$. Характеристика детектора в широком интервале входных напряжений имеет относительно сложный вид. Аналитическое определение оптимальных условий согласования является весьма трудоемкой задачей. Поэтому мы ограничимся качественным рассмотрением условий согласования, при которых обеспечивается максимальная чувствительность спектроскопа.

В рассматриваемом случае при выборе коэффициента отражения $\Gamma_р$ исходят из следующих соображений. В квадратичной области характеристики детектора коэффициент передачи пропорционален амплитуде несущей. С переходом в промежуточную область рост коэффициента передачи замедляется, и с дальнейшим увеличением амплитуды (в линейной области) коэффициент передачи практически не зависит от амплитуды несущей.

Однако в линейном режиме с увеличением приложенного к детектору напряжения резко возрастают аномальные шумы детектора, особенно в области звуковых частот. При больших уровнях мощности, падающей на резонатор, даже небольшое отклонение $\Gamma_р$ от нуля может привести к переходу от квадратичного детектирования к линейному. Следовательно, в отличие от предыдущего случая, оптимальное условие согласования определяется, с одной стороны, уменьшением коэффициента передачи при уменьшении уровня несущей, а с другой — увеличением аномальных шумов детектора с ростом приложенного к нему напряжения. Выбор $\Gamma_р$ определяется правильным выбором режима детектирования. Оптимальный режим детектирования зависит от коэффициента шумов усилителя и от индивидуальных свойств кристаллического детектора. Для простого спектроскопа частотными и амплитудными шумами генератора можно пренебречь.

Как показывают эксперименты, для спектроскопов с модуляцией магнитного поля, не выше 1 *кгц*, оптимальным является режим работы между квадратичной и линейной областями.

Таким образом, в простом спектроскопе при работе с разными уровнями мощности для обеспечения оптимального режима детектирования необходимо подбирать соответствующие значения коэффициента отражения $\Gamma_р$.

## 3. ИСКАЖЕНИЕ ФОРМЫ СИГНАЛА ПОГЛОЩЕНИЯ В ТРАКТЕ СВЧ

Опыт работы с простой отражательной схемой, и особенно с супергетеродинной, показывает, что при коэффициенте отражения $\Gamma_р$ близком к нулю, форма сигнала поглощения искажается из-за наличия сигнала дисперсии даже при небольшом отклонении частоты генератора от собственной частоты резонатора. Детальное рассмотрение этого вопроса приведено ниже. При больших сигналах поглощения искажение их формы наблюдается и при точной настройке частоты генератора на резонансную частоту резонатора. Эти искажения не связаны с влиянием дисперсии.

Экспериментально наблюдаемые искажения формы сигнала ЭПР дифенилпикрилгидразила в зависимости от согласования при точной настройке частоты генератора представлены на рис. 2—4. Сигналы наблюдались на супергетеродинном радиоспектроскопе, аналогичном описанному в [3].

Как видно из рис. 2—4, при больших уровнях сигнала форма кривой поглощения может быть существенно искажена. Рассмотрим причину наблюдаемых искажений. Условие согласования $\Gamma_р = 0$ соответствует случаю критической связи. Отклонение коэффициента отражения от нуля может быть как в сторону связи, выше критической, так и в сторону связи, ниже критической. При коэффициенте отражения $\Gamma_р$, близком к нулю, величина амплитуды отраженной волны определяется приближенным выражением

$$U_{отр} \simeq (r - R_0 n^2) \frac{U_{пад}}{2r}. \tag{16}$$

При согласованиях ниже критического $(R_0 n^2 / r < 1)$, и критическом $(R_0 n^2 / r = 1)$ выражение (16) удобно представить в виде

$$U_{отр} = \Delta R_н \frac{U_{пад}}{2r}, \tag{17}$$

где

$$\Delta R_н = r - R_0 n^2 \geqslant 0.$$

Парамагнитное поглощение вызывает увеличение сопротивления $\Delta R_н$ на величину $\Delta r$ и, следовательно, соответствующее увеличение уровня амплитуды отраженной волны

$$U_{отр} = (\Delta R_н + \Delta r) \frac{U_{пад}}{r}. \tag{18}$$

Сигналом является увеличение амплитуды отраженной волны. Величина сигнала пропорциональна $\Delta r$ и, следовательно, при согласованиях, ниже критического, и критическом форма сигнала не искажается.

При согласовании, выше критического, парамагнитное поглощение вызовет изменение амплитуды отраженной волны, которое определится выражением

$$U_{отр} = |\Delta R_в - \Delta r| \frac{U_{пад}}{2r}, \tag{19}$$

где

$$\Delta R_в = |r - R_0 n^2|.$$

Как следует из (19), с увеличением $\Delta r$ амплитуда $U_{отр}$ сначала уменьшается, при $\Delta R_в = \Delta r$ — становится равной нулю и с дальнейшим увеличением $\Delta r$ начинает увеличиваться.

Таким образом, в случае связи, выше критической, пропорциональность между парамагнитным поглощением мощности СВЧ и изменением амплитуды отраженной волны может быть нарушена и форма сигнала искажена. Чтобы при связи, выше критической, форма сигнала не искажалась, следует увеличить рассогласование $(\Delta R_в)$ либо уменьшить количество образца.

Заметим, что в соответствии с (18) и (19) при переходе от согласования, ниже критического, к согласованию, выше критического, фаза сигнала изменяется на противоположную. Из выражений (18) и (19) следует однозначное объяснение наблюдаемых сигналов. Сигнал на рис. 2 соответствует случаю согласования, ниже критического. Сигналы на рис. 3 и 4 соответствуют согласованию, выше критического, причем $|\Gamma_р|$ для сигнала на рис. 4 больше $|\Gamma_р|$ для сигнала на рис. 3. В обоих случаях (рис. 3 и 4) $\Delta R_в < \Delta r_{макс}$.

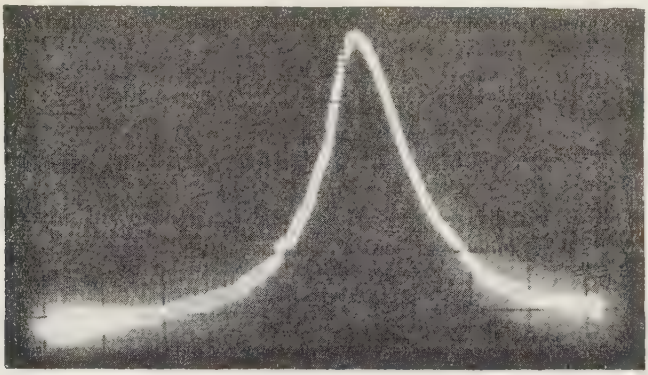


Рис. 2. Сигнал поглощения дифенилпикрилгидразила при связи, ниже критической

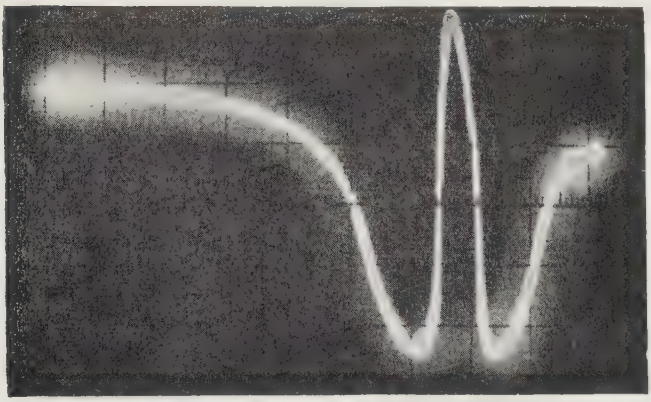


Рис. 3. Сигнал поглощения дифенилпикрилгидразила при связи, выше критической, и $\Delta R_{в1} < \Delta r_{макс}$

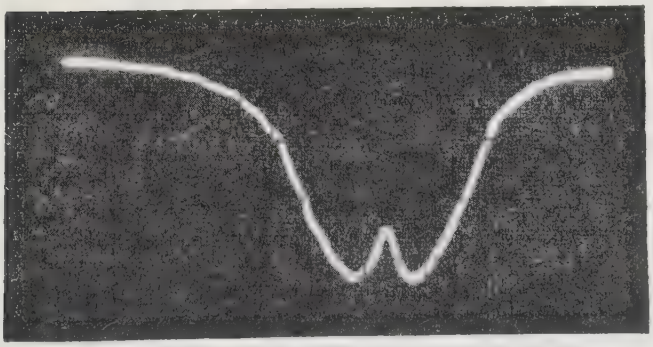


Рис. 4. Сигнал поглощения дифенилпикрилгидразила при связи, выше критической, и $\Delta R_{в2} > \Delta R_{в1}$, но $\Delta R_{в2} < \Delta r_{макс}$

## 4. ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДЫ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ ОТ РАССТРОЙКИ $\Delta\omega$ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ СОГЛАСОВАНИЯ

Амплитуда отраженной волны определяется выражением

$$U_{\text{отр}} = \left| \frac{Z_{\text{н}} - R_0 n^2}{Z_{\text{н}} + R_0 n^2} \right| U_{\text{пад}}, \tag{20}$$

где

$$Z_{\text{н}} = r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Обозначая $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, модуль коэффициента отражения можно представить в виде

$$|\Gamma| = \sqrt{\frac{(r - R_0 n^2)^2 + X^2}{(r + R_0 n^2)^2 + X^2}}. \tag{21}$$

Как известно [4], для частот, близких к резонансной,

$$\frac{X}{r} = Q_0 \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}, \tag{22}$$

где $\omega_0$ – резонансная частота; $Q_0$ — добротность ненагруженного резонатора; $\Delta\omega_0$ полуширина резонансной кривой на уровне 0,7; $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — расстройка от резонансной частоты. С учетом (22) модуль коэффициента отражения удобно представить в виде

$$|\Gamma| = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R_0 n^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{R_0 n^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2}}. \tag{23}$$

Из (3) следует, что

$$\frac{R_0 n^2}{r} = \frac{1 - \Gamma_{\text{р}}}{1 + \Gamma_{\text{р}}}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), получим окончательное выражение зависимости модуля коэффициента отражения $|\Gamma|$ от расстройки при различных условиях связи:

$$|\Gamma| = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\Gamma_{\text{р}}}{1 + \Gamma_{\text{р}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{2}{1 + \Gamma_{\text{р}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2}}. \tag{25}$$

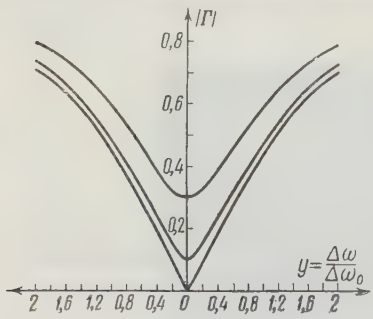



Рис. 5. Зависимость модуля коэффициента отражения от расстройки при различных значениях $\Gamma_{\text{р}}$

Соотношение (25) является основным при оценке влияния сигнала дисперсии и стабильности частоты генератора при различных условиях согласования в отражательной схеме спектроскопа.

Графики зависимости $|\Gamma|$ от относительной расстройки $y = \Delta\omega / \Delta\omega_0$ при значениях $\Gamma_{\text{р}} = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}3$ представлены на рис. 5.

Как видно из рис. 5, при одной и той же расстройке $y$ величина изменения $|\Gamma|$, а следовательно и изменение амплитуды отраженной волны, будет максимальной при $|\Gamma_{\text{р}}| = 0$. Это означает, что величина шума, обусловленного нестабильностью частоты генератора при $\Gamma_{\text{р}} = 0$, будет максимальной. Если дисперсия частотной нестабильности мала по сравнению с шириной полосы резонатора, то увеличение $|\Gamma_{\text{р}}|$ до 0,1—0,2 значительно уменьшит величину частотных шумов.

## 5. СОГЛАСОВАНИЕ ПРИ $|\Gamma|$, БЛИЗКОМ К НУЛЮ

При наблюдении сигнала поглощения в супергетеродинной схеме величина коэффициента отражения $\Gamma_р$ выбирается близкой к нулю.

Рассмотрим зависимость модуля коэффициента отражения от величины расстройки $y$ при значениях $|\Gamma_р|$, лежащих в пределах от нуля до 0,3.

Ограничимся рассмотрением небольших расстроек:

$$y = \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \right| \leqslant 0{,}2. \tag{26}$$

В этом случае

$$\left(\frac{2}{1+\Gamma_р}\right)^2 \gg \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2 \tag{27}$$

и соотношение (25) можно представить в виде

$$|\Gamma| = b\sqrt{a^2 + y^2}, \tag{28}$$

где

$$b = \frac{1+\Gamma_р}{2}; \qquad a = \frac{2\Gamma_р}{1+\Gamma_р}.$$

Графики зависимости $|\Gamma|$ от расстройки при различных условиях согласования представлены на рис. 6.

Из графиков видно, что при том же $|\Gamma_р|$ и той же относительной расстройке $y$ величина модуля коэффициента отражения при связи, выше критической, меньше, чем при связи, ниже критической.

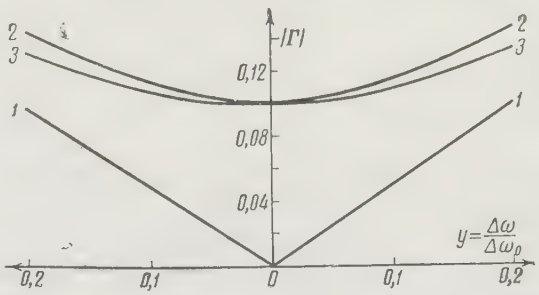



Рис. 6. Зависимость модуля коэффициента отражения при малых расстройках $y$ и связях, выше и ниже критической:

*1* — случай критического согласования, $\Gamma_р = 0$; *2* — согласование, ниже критического, $\Gamma_р = 0{,}1$; *3* — согласование, выше критического, $\Gamma_р = 0{,}1$

Обозначим через $\Gamma_н$ коэффициент отражения при связи, ниже критической, через $\Gamma_в$ — коэффициент отражения при связи, выше критической, и

$$a_н = \frac{2|\Gamma_р|}{1+|\Gamma_р|}, \qquad a_в = \frac{2|\Gamma_р|}{1-|\Gamma_р|}. \tag{29}$$

Отношение модуля коэффициента отражения при связи, ниже критической, к модулю коэффициента отражения при связи, выше критической, можно представить в виде

$$\frac{|\Gamma_н|}{|\Gamma_в|} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{y}{a_н}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{a_в}\right)^2}}. \tag{30}$$

Так как, в соответствии с (29), $a_в > a_н$, то из (30) следует, что

$$|\Gamma_н| > |\Gamma_в|. \tag{31}$$

Можно показать, что для $y \neq 0$ выполняется соотношение

$$\left.\frac{d|\Gamma_н|}{dy}\right| \Big/ \frac{d|\Gamma_в|}{dy} = \frac{\sqrt{a_в^2 + y^2}}{\sqrt{a_н^2 + y^2}}, \qquad (32)$$

из которого видно, что

$$\frac{d|\Gamma_н|}{dy} > \frac{d|\Gamma_в|}{dy}. \qquad (33)$$

Неравенство (33) означает, что при связи, выше критической, нестабильность частоты генератора влияет меньше, чем при связи, ниже критической.

Подставляя в (32) значения $a_в$ и $a_н$ при различных $|\Gamma_р|$ и различных расстройках $y$, можно количественно определить уменьшение крутизны, а следовательно и уменьшение влияния частотных шумов, при переходе от согласования, ниже критического, к согласованию, выше критического. Выражение для крутизны кривой отражения $d|\Gamma|/dy$ при малых расстройках с учетом (28) имеет вид

$$\frac{d|\Gamma|}{dy} = \pm\, b\frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (34)$$

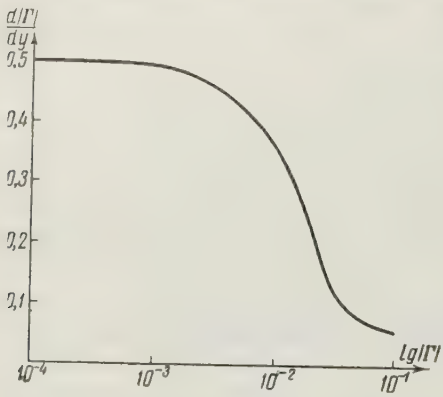



Рис. 7. Зависимость крутизны кривой отражения $d|\Gamma|/dy$ от величины $\lg|\Gamma_р|$ при относительной расстройке $y = 0{,}02$

Из (34) следует, что при уменьшении $|\Gamma_р|$ до нуля величина $d|\Gamma|/dy$ стремится к $\pm 1/2$. При $|\Gamma_р|$, равном нулю, величина $d|\Gamma|/dy = \pm 1/2$ для всех значений $y$, удовлетворяющих условию (22). При $\Gamma_р = 0{,}1$ и $y = 0{,}05$ величина $d|\Gamma|/dy = 0{,}15$. При $\Gamma_р = 0{,}3$ и $y = 0{,}05$ величина $|d\Gamma|/dy = 0{,}075$. Эти примеры показывают, что при небольшой расстройке ($y = 0{,}05$) крутизна кривой отражения существенно зависит от $|\Gamma_р|$. График зависимости крутизны кривой отражения $d|\Gamma|/dy$ от величины $|\Gamma_р|$ при относительной расстройке $y = 0{,}02$ для связи, ниже критической, представлен на рис. 7. При $|\Gamma_р| < 0{,}2$ для связи, выше критической, производная кривой отражения практически не отличается от кривой на рис. 7.

## 6. ВЛИЯНИЕ СИГНАЛА ДИСПЕРСИИ НА ФОРМУ СИГНАЛА ПОГЛОЩЕНИЯ

При наблюдении сигнала поглощения желательно, чтобы изменение амплитуды отраженной волны, обусловленное парамагнитным поглощением, было максимальным, а влияние парамагнитной дисперсии — минимальным. Ранее было показано, что если выбрать величину расстройки $y = 0$, то величина сигнала поглощения $\Delta U_с$ будет максимальной при условии $\Gamma_р = 0$. Соотношения

$$\Gamma_р = 0, \quad y = 0, \qquad (35)$$

определяющие оптимальную связь и настройку при наблюдении сигнала поглощения, получены без учета влияния парамагнитной дисперсии. Влияние дисперсии наиболее сильно сказывается при расстройке $y \neq 0$. Интересно рассмотреть влияние дисперсии на форму сигнала поглощения при настройке $y = 0$.

Рассмотрим этот вопрос для отражательного спектроскопа без автоматической подстройки частоты. Предполагаем, что в отсутствие парамагнитного резонанса $y = 0$. Парамагнитная дисперсия вызывает изменение энергии магнитного поля в резонаторе, что эквивалентно изменению индуктивности резонатора $L$ на величину $\Delta L$.

Пусть парамагнитное поглощение вызывает увеличение эквивалентного сопротивления потерь на величину $\Delta r$, а парамагнитная дисперсия — изменение эквивалентной индуктивности на величину $\Delta L$. Это приведет к изменениям $\Gamma_р$ и $y$:

$$\Delta\Gamma_р = \frac{2R_0n^2}{(R_0n^2 + r)^2}\Delta r,$$

$$\Delta y = Q_0\frac{\Delta L}{L} = \frac{\omega_0}{r}\Delta L. \qquad (36)$$

В результате изменится значение коэффициента отражения $\Gamma$. С учетом (25), (35), (36) для $\Delta\Gamma$ получим следующее приближенное выражение:

$$\Delta\Gamma \simeq \frac{1}{2}\sqrt{(2\Delta\Gamma_р)^2 + \Delta y^2} = \frac{1}{2r}\sqrt{\Delta r^2 + (\omega_0\Delta L)^2}. \qquad (37)$$

Из соотношения (37) следует, что форма отраженного сигнала при условии (35) является сложной функцией сигналов поглощения и дисперсии.

В спектроскопе с отражательным резонатором без автоматической подстройки частоты по рабочему резонатору вклад дисперсии в наблюдаемый сигнал парамагнитного резонанса при условии (35) по крайней мере сравним с вкладом сигнала поглощения. Покажем, что с увеличением $|\Gamma_р|$ при настройке $y = 0$ влияние сигнала дисперсии на форму сигнала поглощения существенно уменьшается. Рассмотрим согласование, при котором

$$|\Gamma_р| \geqslant |\Gamma_{мин}|, \quad y = 0, \qquad (38)$$

причем

$$|\Gamma_{мин}| \gg |\Delta y|, \quad |\Gamma_{мин}| \gg |\Delta\Gamma_р|. \qquad (39)$$

Поскольку обычно величины $|\Delta y|$ и $|\Delta\Gamma_р|$ весьма малы, значение $|\Gamma_{мин}|$ может быть существенно меньше 0,01. В случае (38)

$$\Delta\Gamma \simeq \frac{1}{2}\sqrt{4(\Gamma_{мин} + \Delta\Gamma_р)^2 + \Delta y^2} - |\Gamma_{мин}|. \qquad (40)$$

Пренебрегая в (40) величинами второго порядка, получим, что

$$\Delta\Gamma \simeq \Delta\Gamma_р.$$

Таким образом, при достаточно большом значении $|\Gamma_р|$ влиянием сигнала дисперсии на форму сигнала поглощения можно пренебречь.

## 7. СОГЛАСОВАНИЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ДЕТЕКТИРОВАНИИ С УЧЕТОМ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРА

Ранее было показано, что при квадратичном детектировании величина сигнала после детектора будет максимальной при коэффициенте отражения $\Gamma_р = \pm 1/\sqrt{3}$. Если в спектроскопе нельзя пренебречь влиянием частотных шумов, то оба случая согласования не являются эквивалентными.

Можно показать, что крутизна кривой отражения при $\Gamma_р = 1/\sqrt{3}$ и $y \leqslant 0{,}1$ определится приближенным выражением

$$\frac{\partial|\Gamma_н|}{\partial y} \simeq 0{,}7\,y.$$

При $\Gamma_р = -1/\sqrt{3}$ крутизна кривой отражения имеет вид

$$\frac{\partial |\Gamma_в|}{\partial y} \simeq 0{,}05y.$$

Крутизна кривой отражения при согласовании, ниже критического, примерно в 14 раз больше крутизны кривой отражения при согласовании, выше критического. Обычно отношение дисперсии частотной нестабильности к полуширине полосы резонатора много меньше единицы. Поэтому приближенно можно считать, что дисперсия амплитудной нестабильности на входе детектора пропорциональна крутизне кривой отражения. Это означает, что в случае квадратичного детектирования при согласовании, выше критического, частотные шумы будут в 14 раз меньше, чем при согласовании, ниже критического.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В спектроскопе с отражательным резонатором уменьшение $|\Gamma_р|$ приводит к увеличению крутизны кривой отражения при малых расстройках $y$.

В результате увеличения крутизны возрастает влияние сигнала дисперсии на форму сигнала поглощения, а также увеличиваются шумы, обусловленные нестабильностью частоты генератора СВЧ.

При $\Gamma_р = 0$ и точной настройке $y = 0$ форма сигнала ЭПР является сложной функцией сигнала поглощения и дисперсии. В этом случае шумы, обусловленные нестабильностью частоты, максимальны.

Увеличение частотных шумов и влияние сигнала дисперсии с уменьшением $|\Gamma_р|$ объясняет, почему в супергетеродинных радиоспектроскопах не следует применять усилители промежуточной частоты с очень большим коэффициентом усиления, так как увеличение коэффициента усиления усилителей промежуточной частоты в обычных супергетеродинных спектроскопах означает соответствующее уменьшение $|\Gamma_р|$.

С увеличением уровня мощности, падающей на резонатор, для сохранения необходимого режима работы преобразователя частоты в обычном супергетеродинном спектроскопе приходится уменьшать $|\Gamma_р|$. Это приводит к дополнительному увеличению влияния нестабильности частоты.

Приносим благодарность А. А. Маненкову за ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Feher, Bell System Techn. J., 1957, **36**, 2, 449.
2. D. I. E. Ingram, Free radicals as study by electron spin resonance, London, 1958.
3. А. А. Маненков, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 4, 469.
4. Б. П. Асеев, Колебательные цепи, Связьиздат, 1955.

Поступила в редакцию
19 V 1960

# УСИЛИТЕЛЬ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ В РЕЖИМЕ СИЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

*Г. Н. Рапопорт*

Усиление сигналов конечной амплитуды однокаскадной ЛОВ типа О исследовано на основе численного решения нелинейных уравнений. Показано, что нелинейные эффекты в ЛОВ более существенны, чем в обычной ЛБВ, и практически исключают применение теории слабых сигналов к расчету усилителя мощности на ЛОВ. Кратко рассмотрены режимы захватывания автоколебаний периодическим сигналом на входе ЛОВ.

## ОДНОКАСКАДНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Усилительный режим ЛОВ типа О наблюдал впервые Р. Компфнер [1]. Теория усиления ЛОВ слабых сигналов разработана в [2, 3]. Установлено, что ЛОВ до порога самовозбуждения является регенерированным усилителем со сравнительно узкой полосой усиливаемых частот, которую можно перемещать в более широких пределах, меняя ускоряющее напряжение. Коэффициент усиления слабых сигналов по мощности в середине полосы $G$ определяется из приближенной формулы

$$G = \frac{1}{\left(1 - \frac{I_0}{I_к}\right)^2}, \qquad (1)$$

где $I_0$ – ток электронного луча; $I_к$ — критический ток, соответствующий порогу самовозбуждения. По мере приближения к порогу самовозбуждения усиление возрастает, а ширина полосы $\Delta f$ сужается, причем произведение $\Delta f \sqrt{G}$ остается почти неизменным.

В настоящей статье рассмотрены расчеты усиления и кпд усилителя обратной волны с учетом нелинейных эффектов и установлены границы применимости линейной теории (теории слабого сигнала).

Как известно, для обычных ЛБВ существенные отклонения от линейной теории имеют место только при мощностях на выходе, превышающих 0.4—0,6 мощности насыщения. Поэтому теория слабого сигнала успешно применяется в практических расчетах ЛБВ.

В связи с регенеративным характером усиления в ЛОВ следует ожидать более существенного влияния нелинейных эффектов, в особенности по мере приближения электронного тока к критическому.

Приведенные ниже расчеты основаны на приближенной модели и системе уравнений ЛОВ, рассмотренных в [4, 5]. Для упрощения задачи влияние объемного заряда не учитывается. В этом случае система уравнений ЛОВ имеет вид

$$\frac{d\overline{F}}{\partial \bar{x}} - \delta \overline{F} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz(\alpha, \bar{x})}\, d\alpha, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z(\alpha, \bar{x})}{\partial \bar{x}^2} = -\left(1 - C \frac{\partial z(\alpha, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right)^3 \mathrm{Re}\{e^{iz(\alpha, \bar{x})} \overline{F}(\bar{x})\}, \qquad (3)$$

где $F(\bar{x})$ — безразмерная амплитуда высокочастотного поля, причем

$$\overline{F}(\bar{x}) = \frac{v}{u} F(x); \quad \frac{|F|^2}{2} = \frac{P}{CI_0V}; \qquad (4)$$

$P$ — поток энергии поля; $C$ — параметр усиления; $I_0$ — электронный ток; $V$ — ускоряющее напряжение; $v$ — начальная скорость электронов; $u = u(\omega)$ — фазовая скорость обратной волны в «холодной» замедляющей системе на частоте $\omega$;

$$\bar{x} = \frac{v}{u} x; \quad x = C \frac{\omega}{v} s;$$

$s$ — пробег электрона; $\delta$ — параметр потерь; $z(\alpha, \bar{x})$ — фаза электрона относительно волны в холодной системе в точке $\bar{x}$; $\alpha = -z(\alpha, 0)$ — начальная фаза электрона.

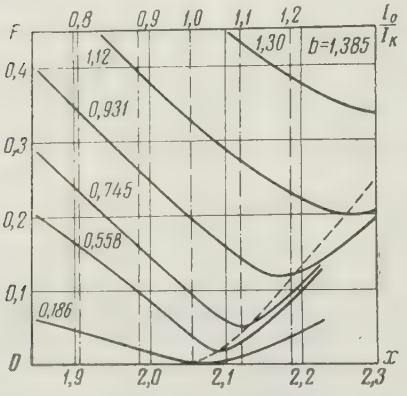



Рис. 1. Функции распределения амплитуд поля для различных амплитуд на выходе лампы. Параметр $b = 1{,}385$

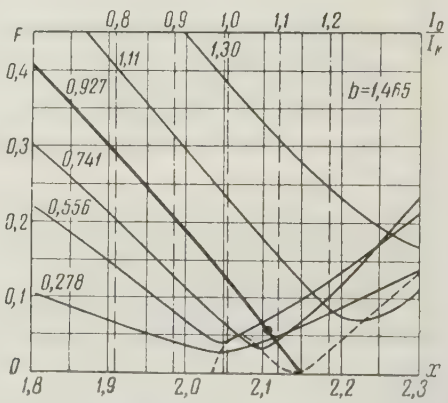



Рис. 2. Функции распределения амплитуд поля для различных амплитуд на выходе лампы. Параметр $b = 1{,}465$

Уравнение (2) описывает возбуждение замедляющей системы потоком электронов, а уравнение (3) — движение электронов в высокочастотном поле. Если дисперсия волн $u(\omega)$ в замедляющей системе известна, то частота $\omega$ однозначно связана с параметром

$$b = \frac{v - u}{Cv} = \left.\frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=0},$$

который вместе с амплитудой поля на выходе лампы $F(0)$ определяет начальные условия для системы уравнений (2)—(3).

При заданных таким образом частоте и амплитуде волны на выходе $F(0)$ амплитуда волны в любой точке $s > 0$ определяется решением системы уравнений (2)—(3).

Для ламп с длиной пространства взаимодействия $L$ амплитуда сигнала на входе будет $F(x_L)$, где $x_L = \frac{\omega}{v} L$.

Система интегродифференциальных уравнений (2)—(3) приводится приближенно к системе 34 обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений первого порядка путем замены непрерывного распределения электронов по начальным фазам дискретным распределением для 16 равноудаленных начальных фаз. Интегрирование проводилось на электронной вычислительной машине «Урал» методом Рунге — Кутта четвертого порядка.

В расчетах приняты следующие значения параметров: $C = 0{,}05$; $\delta = 0{,}1$ («холодные» потери составляют около 0,27 *дб* на длину замедленной волны).

На рис. 1 и 2 показаны функции распределения амплитуд поля для различных амплитуд на выходе $F(0)$, величины которых указаны на кривых. Для рис. 1 параметр $b = 1{,}385$, что соответствует частоте сигна-

ла, равной частоте автоколебаний ЛОВ, длина которой доведена до порога самовозбуждения. Для рис. 2 $b = 1{,}465$, что соответствует более низкой частоте сигнала, равной собственной частоте автоколебаний ЛОВ при отношении токов $I_0/I_k = 1{,}15$.

На нижней шкале оси абсцисс отложены величины $x$; на верхней — отношения рабочего тока к пусковому $I_0 / I_к$. Аналогичные расчеты выполнены для ряда значений параметра $b$ от 1 до 2. В области $x \leqslant 2{,}055$,

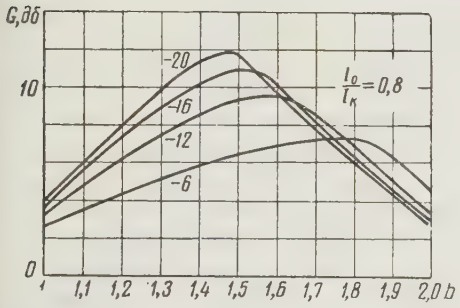



Рис. 3. Зависимость коэффициента усиления $G$ от параметра $b$ для различных мощностей возбуждения $P_{вх}$, $I_0/I_к$=0,8, цифры на кривых—величина $P_{вх}/CI_0V$ (*дб*)

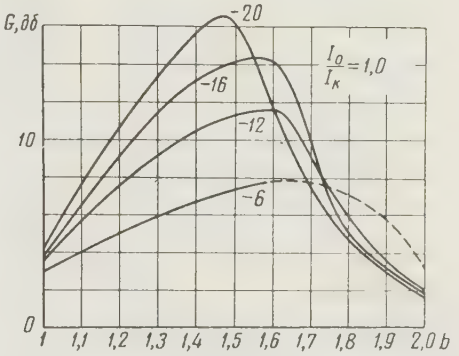



Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления $G$ от параметра $b$ для различных мощностей возбуждения $P_{вх}$, $I_0 / I_к = 1{,}0$, цифры на кривых — величина $P_{вх} / CI_0V$ (*дб*)

где $I_0 / I_к \leqslant 1$, полученные решения $F(x)$ описывают усилительные режимы ЛОВ. При $I_0 / I_к > 1$, где $x > 2{,}055$, полученные решения $F(x)$ формально соответствуют режимам захватывания автоколебаний внешним сигналом.

При малых амплитудах на выходе (меньше 0,3) функции $F$ приближаются к функциям, вычисленным по теории слабого сигнала. Характерным нелинейным эффектом является зависимость положения и величины минимума $F(x)$ от амплитуды на выходе $F(0)$. Огибающие минимумов $F(x)$ показаны пунктиром на рис. 1 и 2.

Рассмотрим основные характеристики усилительных режимов. На рис. 3 и 4 показаны зависимости коэффициента усиления $G$ (в децибелах) от параметра $b$ для различных мощностей возбуждения $P_{вх}$.

По рис. 3 и 4 можно рассчитать зависимости усиления от частоты сигнала $f$ при фиксированном ускоряющем напряжении $V = \text{const}$ или зависимости усиления от $V$ при $f = \text{const}$. Пусть $f_1$ и $f_2$ — частоты, соответствующие значениям $b_1$ и $b_2$ при $V = \text{const}$. Тогда, как легко видеть,

$$\frac{f_2 - f_1}{\bar{f}} \simeq \frac{-C}{f + \left| \frac{u_ф}{u_{гр}} \right|} (b_2 - b_1), \tag{5}$$

при $f = \text{const}$

$$\frac{V_2 - V_1}{\bar{V}} \simeq 2C (b_2 - b_1), \tag{6}$$

где $\bar{f}$ — средняя частота; $\bar{V}$ — среднее ускоряющее напряжение; $u_ф$ и $u_{гр}$ — фазовая и групповая скорости замедленной (обратной) волны.

На рис. 3 и 4 видно, что при повышении мощности возбуждения максимальное усиление ЛОВ падает и максимум усиления смещается

в сторону более низких частот, причем ширина полосы возрастает. Из рис. 3 и 4 и соотношения (5) видно, что при заданных $I_0/I_к$ и приведенной мощности возбуждения $P_{вх}/CI_0V$ для расширения полосы усиливаемых частот желательно уменьшать дисперсию системы и повышать сопротивление связи системы с пучком электронов, а также величину тока $I_0$.

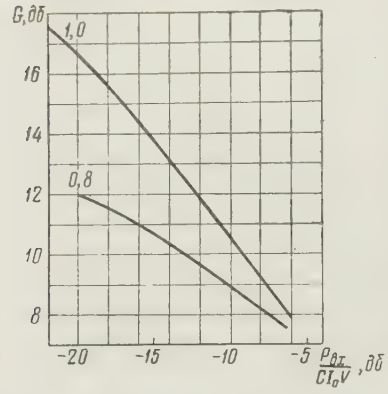



Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления $G$ от нормированной мощности возбуждения для частот сигнала, соответствующих максимальному усилению. $I_0/I_к = 0{,}8$ и $I_0/I_к = 1{,}0$

Для сигналов с частотой, выше или равной частоте $f_0$ автоколебаний ЛОВ у границы самовозбуждения, усиление падает при повышении мощности сигнала, однако на частотах ниже $f_0$ возможно нелинейное увеличение усиления с повышением мощности возбуждения. Объяснение аналогичного эффекта в ЛБВ при больших значениях параметра $b$ дано в [6].

На рис. 5 показаны зависимости коэффициента усиления $G$ (в децибелах) от нормированной мощности возбуждения, также выраженной в децибелах, для частот сигнала, соответствующих максимальному усилению. Для тех же частот на рис. 6 показаны зависимости мощности на выходе $P_{вых}/CI_0V$ от мощности возбуждения. Пунктирные кривые рис. 6 соответствуют разности $(P_{вых} - P_{вх})/CI_0V$. Для сравнения на рис. 6 стрелкой отмечена максимальная мощность ЛОВ с заданными параметрами $C$, $\delta$, $I_0$, $V$ в генераторном режиме (лампа дает такую мощность, если длина замедляющей системы на 40% превышает критическую).

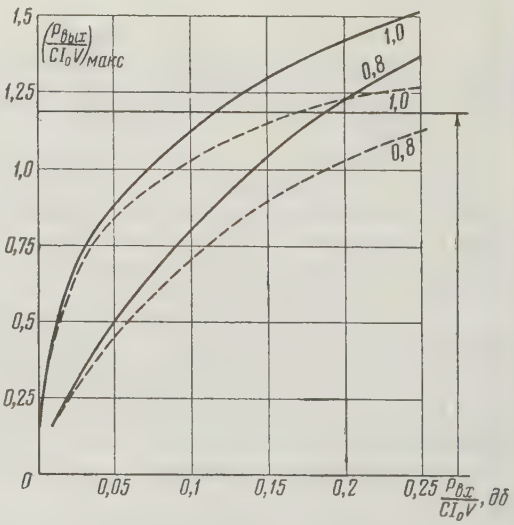



Рис. 6. Зависимость мощности на выходе $P_{вых}/CI_0V$ от мощности возбуждения для частот сигнала, соответствующих максимальному усилению. Пунктирные кривые на рис. 6 соответствуют разности $(P_{вых} - P_{вх})/CI_0V$

Из рис. 5 и 6 видно, что при $I_0/I_к = 0{,}8$ область линейного усиления ограничена весьма малыми мощностями, не превышающими 10—15% мощности насыщения (кпд менее 1%). При приближении к границе самовозбуждения «линейная» область еще более сужается. Из этого следует, что теория слабых сигналов практически непригодна для расчета усилителей мощности на ЛОВ. При $I_0/I_к = 1$ теория слабых сигналов приводит к бесконечному усилению, в то время как даже при сравнительно малой мощности возбуждения $P_{вх} = 0{,}01\,CI_0V$ фактическое усиление меньше 17 *дб*. На возможность синхронизации лампы обратной волны типа О внешним периодическим сигналом указал М. С. Нейман. В статье [7] рассмотрены способы синхронизации и дана качественная характеристика ожидаемых зависимостей ширины полосы захватывания от параметров лампы и мощности сигнала.

Переходя к рассмотрению режимов захватывания по данным проведенных расчетов, заметим, что вопрос об устойчивости этих режимов

не может быть строго поставлен в данной работе, поскольку мы исходим из предположения о стационарности и одночастотности колебаний. Тем не менее легко указать последовательность заведомо устойчивых режимов захватывания.

На рис. 2 жирной линией указана функция распределения поля $F_1(x)$ для автоколебательного режима лампы с длиной $x_L = 2{,}15$, соответствующей $I_0/I_к = 1{,}15$. В этом режиме частота автоколебаний $f_0 = f_1$ соответствует $b = 1{,}465$ и амплитуда на выходе $F_1(0) = 0{,}927$. Очевидно, что лампа меньшей длины, например $x_L' = 2{,}12\,(I_0/I_к = 1{,}08)$, для которой частота автоколебаний $f_0 = f_2 > f_1^*$, может быть синхронизирована сигналом частоты $f_1$, если амплитуда сигнала соответствует функции распределения автоколебательного режима и равна $F_1(x_L') = 0{,}06$ (точка с координатами $x_L'$ и $F = F_1(x_L')$ на рис. 2 указана кружком). Поскольку автоколебательный режим лампы длины $x_L$ устойчив, устойчивы и режимы захватывания лампы меньшей длины $x_L'$, которые характеризуются тем же распределением поля и токов, что и автоколебательный режим (жирная линия на рис. 2).

Режимы синхронизации лампы сигналами частоты $f_1$, но с бо́льшими амплитудами на входе также должны быть устойчивыми. Эти режимы представлены нисходящими ветвями функций распределения, расположенными выше линии автоколебательного режима $F_1$ и соответствующими бо́льшим амплитудам на выходе.

Из рис. 2 видно, что линии устойчивых режимов пересекаются восходящими ветвями функций распределения с амплитудами на выходе $F(0) = 0{,}278$—$0{,}741$, меньшими, чем для автоколебательного режима той же частоты. Следовательно, восходящие ветви функций распределения на рассматриваемом участке $2{,}055 \leqslant x_L < 2{,}15$ соответствуют неустойчивым режимам.

Если принять в соответствии с изложенным выше, что в пределах устойчивости режима захватывания амплитуда на выходе ЛОВ не должна быть меньше амплитуды свободных автоколебаний $F_a$, то можно показать, что изменение параметра $b$ в полосе захватывания составляет $\simeq 0{,}8\,\frac{F_c}{F_a}$, где $F_c$ — амплитуда синхронизирующего сигнала на входе ЛОВ. Учитывая (5), для ЛОВ с рассмотренными выше параметрами получим следующую оценку ширины области $\Delta f$ захватывания частоты:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq 0{,}8\,\frac{\overline{C}}{1 + \left|\frac{u_ф}{u_{гр}}\right|}\,\frac{F_c}{F_a}. \qquad (7)$$

Из сказанного выше следует также, что автоколебания ЛОВ с конечной амплитудой на выходе могут быть захвачены сколь угодно слабым сигналом на входе лампы, если частота сигнала приближается к частоте свободных автоколебаний.

Ширина полосы захватывания лампы при прочих равных условиях тем больше, чем меньше дисперсия замедляющей системы. Отметим, что полученные результаты находятся в качественном соответствии с выводами работы [7].

Дальнейшей задачей теории является рассмотрение двухчастотных (асинхронных) режимов ЛОВ и определение границ устойчивости синхронного режима. Однако и полученные результаты указывают на принципиальную возможность применения синхронизированной лампы в качестве узкополосного «усилителя» модулированных сигналов с соответственно ограниченным спектром.

* При увеличении длины лампы или тока электронного пучка частота автоколебаний уменьшается [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Kompfner, N. T. Williams, Backward-wave tubes, Proc. I. R. E., 1953, **41**, 11, 1602.
2. H. Heffner, Analysis of the backward-wave travelling-wave tube, Proc. I. R. E., 1954, **42**, 6, 930.
3. M.R.Currie, J.R.Whinnery, The cascade backward-wave amplifier: a high-gained voltage-tuned filter for microwaves, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 11, 1617.
4. Г. Н. Рапопорт, Некоторые результаты нелинейной теории автоколебаний лампы обратной волны с продольным полем, Докл. АН СССР, 1958, **117**, 3, 411.
5. Г. Н. Рапопорт, Нелинейная теория лампы с бегущей волной (обзор), Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1958, 5, 599.
6. Л. А. Вайнштейн, Нелинейная теория ЛБВ. Ч. II. Численные результаты, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 8, 1027.
7. М. С. Нейман, О некоторых особенностях применения метода принудительной синхронизации частоты к автогенераторам обратной волны, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1958, 3, 288.

Поступила в редакцию
9 V 1960

# ОБ УСИЛЕНИИ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОНОВ В СРЕДАХ С ИНДУКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

*Л. В. Касаткин*

На базе анализа одномерной системы рассмотрен механизм взаимодействия, приводящий к усилению волн пространственного заряда при индуктивно-резистивной реакции среды вне собственной полосы пропускания. Приведен приближенный учет нелинейности процесса группировки, позволяющий оценить характеристики усиления.

Вопрос об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов через системы с индуктивными или активными приведенными к пучку проводимостями рассмотрен в ряде работ.

В [1] описана замедляющая система типа «двойная гребенка» и в результате решения уравнений поля показано, что вне полосы пропускания этой системы, когда приведенная к пучку проводимость индуктивна, возможно появление возрастающей волны в пучке электронов. В [2] определены характеристики усиления волн пространственного заряда (в линейном приближении) при различных по характеру проводимостях стенок дрейфа для случаев цилиндрической и плоской симметрии. Весьма интересное применение этого принципа усиления описано в [3], где так называемый «индуктивный дрейф», выполненный в виде замедляющей системы, полоса пропускания которой лежит в области частот, более высоких, чем рабочие, служил активной усиливающей развязкой в ЛБВ «гибридного» типа. Благодаря использованию усиления волн в пучке при прохождении индуктивного дрейфа удалось сократить секции замедляющих волноводов группирователя и отбирателя и тем самым обеспечить высокую устойчивость усилителя при значительных усилении и широкополосности.

Механизм усиления волн пространственного заряда нетрудно проследить при рассмотрении одномерной модели, в которой пучок электронов свободно проходит вдоль тонких каналов в среде, имеющей индуктивную проводимость $y = -jB_L = -j/\omega L_1$, а также, в общем случае, активную проводимость $\sigma$. Параметры среды выбраны так, что в отсутствие пучка электронов электромагнитные колебания в среде распространяться не могут.

При прохождении пучка электронов с переменными составляющими плотности тока $i_п$ и плотности заряда $\rho_п$ через рассматриваемую систему в среде возникают наведенный заряд с плотностью $\rho_с$ и ток с плотностью

$$i_с = \sigma E_z + \frac{1}{L_1}\int E_z dt. \qquad (1)$$

Здесь коэффициент индуктивности $L_1$ характеризует удельное индуктивное сопротивление среды. При гармоническом возбуждении коэффициент $L_1$ связан с отрицательной диэлектрической проницаемостью среды $\varepsilon_с\,(\varepsilon_с < 0)$ соотношением $L_1 = -1/\omega^2\varepsilon_с$. Плотность полного заряда в системе

$$\rho_\Sigma = \rho_п + \rho_с, \qquad (2)$$

а плотность полного тока

$$i_\Sigma = \operatorname{rot} H = i_\text{п} + \sigma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{1}{L_1}\int E_z dt. \tag{3}$$

Для определения заряда, наведенного в среде, воспользуемся уравнением

$$\operatorname{div} E_z = \frac{\rho_\Sigma}{\varepsilon} \tag{4}$$

и уравнением непрерывности конвекционного тока пучка

$$\operatorname{div} i_\text{п} + \frac{\partial \rho_\text{п}}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Применяя операцию div к уравнению (3), учитывая (2), (4), (5), а также временну́ю зависимость $e^{j\omega t}$, получим

$$\rho_\text{с} = -\rho_\text{п}\left[1 + \frac{1}{\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}}\right]^{-1}. \tag{6}$$

В зависимости от параметров $\sigma$, $\varepsilon$, $L$ в среде возникают различные по фазе и по величине наведенные заряды, электрическое поле которых взаимодействует с пучком электронов. Характер этого взаимодействия можно определить, исходя из волнового уравнения для рассматриваемой одномерной системы:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_\Sigma + \mu \frac{\partial i}{\partial t}. \tag{7}$$

Здесь $i$ — плотность тока, равная сумме плотностей конвекционного тока в пучке и тока в среде. Выражая $\rho_\text{с}$ через $\rho_\text{п}$ согласно (6), представляя $\rho_\text{п}$ и $i$ через $E_z$ (так же, как в [2, 4]) и принимая, что все переменные величины зависят от $z$ и $t$ согласно выражению $e^{j(\omega t - \beta z)}$, получим вместо (7)

$$E_z(\beta^2 - \omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma + \omega\mu B_L)\left[\frac{(\varepsilon_0/\varepsilon)\beta_p^2}{(\beta_e - \beta)^2\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)} - 1\right] = 0, \tag{8}$$

где $\beta_p = \omega_p / u_0 = (\eta I_0 / \varepsilon u_0^3)^{1/2}$ — волновое число в плазме; $\varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость в вакууме; $I_0$ — постоянная сооставляющая плотности тока пучка; $u_0$ — постоянная скорость электронов; $\beta_e = \omega / u_0$.

Уравнение (8) является уравнением четвертой степени относительно $\beta$ и, таким образом, определяет четыре возможных волны: две затухающие волны в среде, не связанные с пучком, и две волны пространственного заряда. Коэффициент распространения волн пространственного заряда в пучке определится выражением

$$\beta = \beta_e \pm \frac{\beta_p}{\sqrt{\varepsilon'_\text{с}}}, \tag{9}$$

где

$$\varepsilon'_\text{с} = \varepsilon'\left[1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon} - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right], \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}; \tag{10}$$

$\varepsilon'_\text{с}$ — эквивалентная комплексная диэлектрическая проницаемость, учитывающая активную и реактивную проводимости среды.

При подстановке (10) в (9) видно, что в общем случае при индуктивно-активной реакции со стороны среды возможно усиление волн про-

странственного заряда в пучке, т. е.

$$\beta = \beta_e \pm \beta_p (p + jq) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}, \tag{11}$$

где

$$p = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)\right\}^{1/2}}{\left[\left(1 - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2}}; \tag{12}$$

$$q = \frac{\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)\right\}^{1/2}}{\left[\left(1 - \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{13}$$

Максимальные значения $p$ и $q$ имеют место при величинах $B_L/\omega\varepsilon$, определяемых выражениями

$$\left(\frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)_{p_{\text{макс}}} = 1 - \frac{\sigma/\omega\varepsilon}{\sqrt{3}}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)_{q_{\text{макс}}} = 1 + \frac{\sigma/\omega\varepsilon}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

При этом

$$p_{\text{макс}} = q_{\text{макс}} \simeq \frac{081}{(\sigma/\omega\varepsilon)^{1/2}}. \tag{16}$$

На рис. 1 и 2 представлены семейства зависимостей $p = f(B_L/\omega\varepsilon)$ и $q = f(B_L/\omega\varepsilon)$ при различных значениях параметра $\sigma/\omega\varepsilon$. В случае малых потерь в среде имеет место значительное усиление волн пространственного заряда в пучке при $B_L/\omega\varepsilon$, несколько бо́льших и близких к единице. При $0 < B_L/\omega\varepsilon < 1$ заметное усиление возможно лишь при значительных потерях в среде, а при $\sigma/\omega\varepsilon = 0$ в этой области значений $B_L/\omega\varepsilon$ усиление отсутствует. Увеличение потерь в среде уменьшает максимальное значение усиления (при $\sigma/\omega\varepsilon \to 0$ $q \to \infty$), но расширяет область параметров $B_L/\omega\varepsilon$, при которых возможно усиление. Параметр $p$, определяющий изменение характеристической плазменной частоты, при $\sigma/\omega\varepsilon = 0$ лежит в пределах $1 \leqslant p \leqslant \infty$, когда $0 \leqslant B_L/\omega\varepsilon \leqslant 1$ и $p = 0$ при $B_L/\omega\varepsilon \geqslant 1$. Таким образом, в отсутствие потерь в среде возможно усиление волн пространственного заряда в пучке при $B_L/\omega\varepsilon \geqslant 1$ с невозмущенной скоростью усиливаемой волны $v_\Phi = u_0$. Потери приводят к уменьшению $p_{\text{макс}}$ и к расширению области частот, в которой $p$ отлично от нуля.

Для выяснения физической картины взаимодействия при наличии индуктивной реакции среды рассмотрим частный случай отсутствия потерь ($\sigma/\omega\varepsilon = 0$). В этом случае наведенный заряд в среде определяется согласно (6) выражением

$$\rho_c = -\rho_n \left[1 - \frac{1}{B_L/\omega\varepsilon}\right]^{-1}. \tag{17}$$

На рис. 3 представлена зависимость $\rho_c/\rho_n = f(B_L/\omega\varepsilon)$. При $B_L/\omega\varepsilon \leqslant 1$ в индуктивной среде наводится заряд того же знака, что и в пучке, и при $B_L/\omega\varepsilon \to 1$ $\rho_c \to \infty$. При этом напряженность электрического поля $E_c'$, создаваемая наведенным зарядом, складывается в фазе с силами пространственного заряда в пучке $E_n$, в результате чего увеличивается продольное расталкивание электронов и усиление волн пространственного заряда оказывается невозможным. При $B_L/\omega\varepsilon \geqslant 1$ знак наведен-

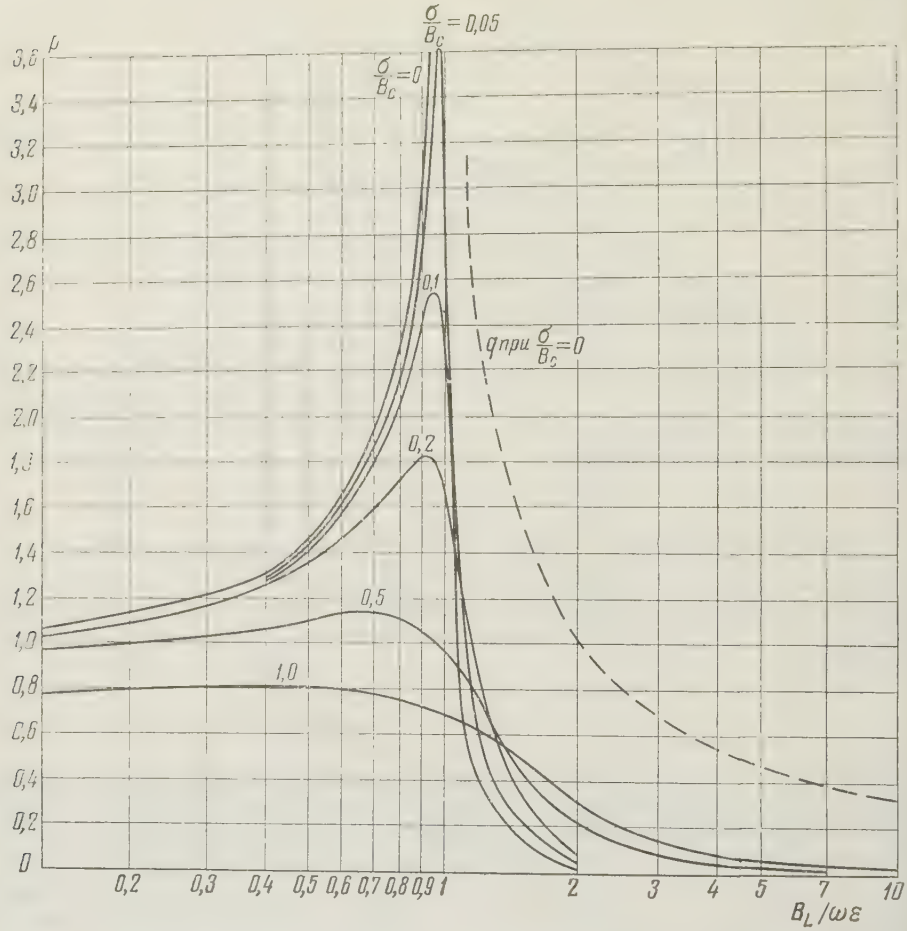



Рис. 1. Зависимости параметра изменения плазменной частоты $p$ от характеристик среды $B_L/\omega\varepsilon$ и $\sigma/B_c, B_c = \omega\varepsilon$

ного в среде заряда изменяется. Силы пространственного заряда в пучке и силы, создаваемые наведенным зарядом $E_c''$, оказываются в противоположных фазах (см. рис. 4). При $|\rho_c| \geqslant |\rho_п|$ результирующая напряженность электрического поля, действующего в пучке, приводит к ускорению замедленных электронов и к замедлению ускоренных электронов относительно центра группы, в результате чего улучшаются условия группировки электронов в пучке и обеспечивается возможность усиления волн пространственного заряда. При выполнении условия $B_L/\omega_0\varepsilon = 1$ в среде наступает резонанс: токи смещения и индуктивные токи в среде становятся равными друг другу по величине. В этом случае наведенный в среде заряд стремится к $\infty$ и изменяет знак в окрестности $\omega = \omega_0$.

Усиление волн пространственного заряда при прохождении пучка через систему с индуктивной реакцией определяется улучшением группировки электронов в пучке вдоль пути пролета и, в результате, увеличением наведенного заряда в среде. Энергия вдоль системы при этом не передается. В связи с этим для возбуждения волн в пучке необходимо применение группирователя (типа секции замедляющей системы ЛБВ, либо резонатора), создающего в общем случае модуляцию пучка по скорости и плотности. Для реализации усиления в индуктивном дрейфе применяется секция, аналогичная группирователю, в которой усиленная

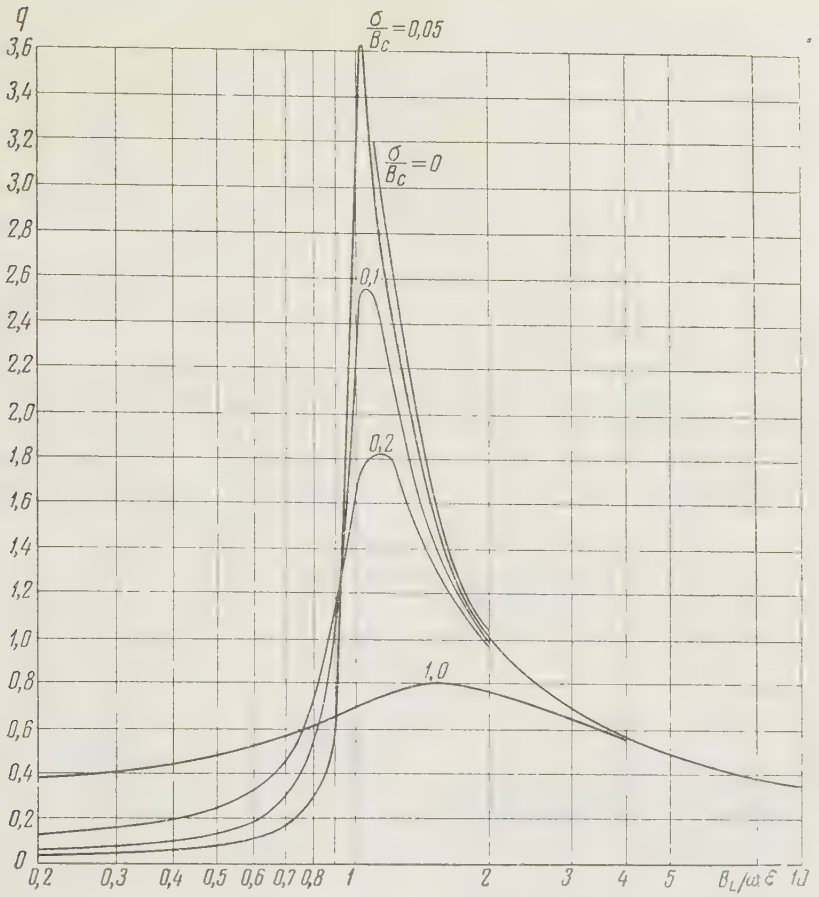



Рис. 2. Зависимости параметра усиления $q$ от характеристик среды $B_L/\omega\varepsilon$ и $\sigma/B_c$, $B_c=\omega\varepsilon$

переменная составляющая тока в пучке возбуждает электромагнитные колебания.

Рассмотрим приближенно нелинейный эффект группировки в индуктивном дрейфе. В связи с усилением переменных составляющих тока и скорости в пучке нелинейные эффекты проявляются здесь значительно сильнее, чем в дрейфе с идеально проводящими стенками.

Если амплитуды переменных составляющих тока и скорости электронов на входе в индуктивный дрейф равны $i_{10}$ и $u_{10}$ соответственно, то переменная составляющая скорости электрона в сечении $z$, влетевшего в дрейф в момент $t_0$, определится выражением

$$u_1(z) = u_{10}\operatorname{ch} k_p qz \sin\omega t_0 + i_{10}\frac{u_0 q\omega_p}{\omega I_0}\operatorname{sh} k_p qz\cos\omega t_0. \tag{18}$$

Пролетное время электрона в дрейфе $(z = s)$

$$t_1 - t_0 = \int_0^s \frac{dz}{u_0 + u_{10}\operatorname{ch} k_p qz\sin\omega t_0 + i_{10}\dfrac{u_0 q\omega_p}{\omega I_0}\operatorname{sh} k_p qz\cos\omega t_0}. \tag{19}$$

При выполнении условий

$$\frac{u_{10}}{u_0}\operatorname{ch} k_p qz \ll 1, \quad \frac{i_{10}}{I_0}\frac{q\omega_p}{\omega}\operatorname{sh} k_p qz \ll 1 \tag{20}$$

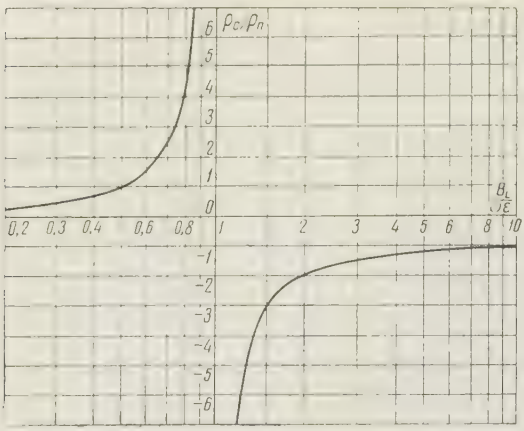



Рис. 3

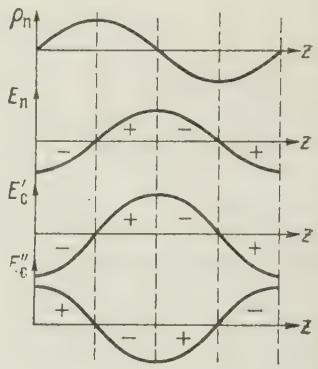



Рис. 4

Рис. 3. Зависимости наведенного в среде заряда $\rho_c$ от характеристик среды $B_L/\omega\varepsilon$ в отсутствие потерь ($\sigma/\omega\varepsilon = 0$)

Рис. 4. Характеристики продольного распределения плотности заряда в пучке $\rho_n$, напряженности поля пространственного заряда $E_n$ и напряженностей поля наведенного заряда $E'_c$ (при $B_L/\omega\varepsilon < 1$) и $E''_c$ (при $B_L/\omega\varepsilon > 1$)

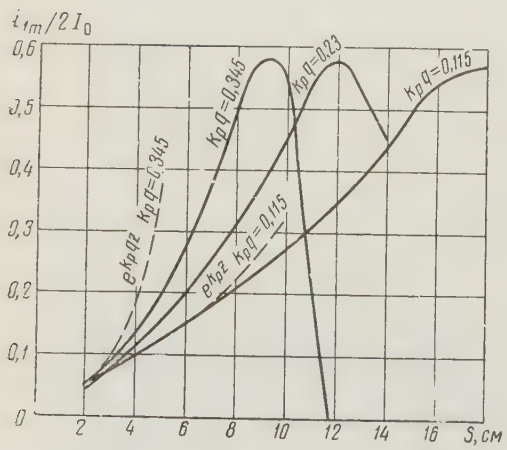



Рис. 5

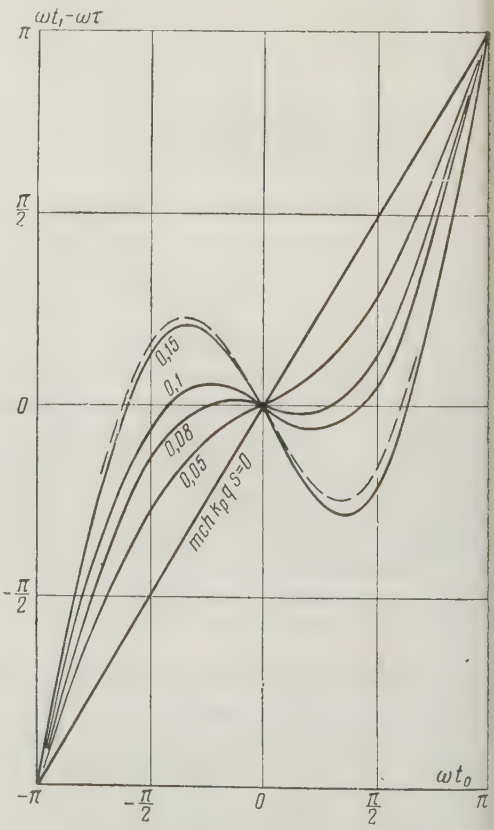



Рис. 6

Рис. 5. Изменение амплитуды первой гармоники тока пучка вдоль дрейфа с индуктивной реакцией при различных погонных усилениях $k_p q$ (в неперах)

Рис. 6. Зависимость фазы прибытия электронов $\omega t_1$ от фазы вылета $\omega t_0$ при различных значениях $m\,\mathrm{ch}\,(k_p qs)$

из (19) можно получить

$$\Theta = \omega (t_1 - t_0) \simeq \omega\tau - X \sin (\omega t_0 - \psi), \tag{21}$$

где $\tau = s/u_0$,

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{i_{10}}{I_0} (\operatorname{ch} k_p qs - 1)}{\frac{u_{10}\omega}{u_0 \omega_p q} \operatorname{sh} k_p qs}, \tag{22}$$

$$X = \left\{ \left( \frac{u_{10}\omega}{u_0 \omega_p q} \operatorname{sh} k_p qs \right)^2 + \left[ \frac{i_{10}}{I_0} (\operatorname{ch} k_p qs - 1) \right]^2 \right\}^{1/2}, \tag{23}$$

$X$ — параметр группировки.

Как видно из (22), параметр группировки электронов в индуктивном дрейфе быстро растет с увеличением длины пролета $s$ — почти экспоненциально при значительных величинах $k_p qs$. Амплитуда первой гармоники тока в трубке дрейфа на расстоянии $s$ от группирователя определится выражением

$$i_{1m} = i_{10} J_0 (X) + 2 I_0 \cos \psi J_1 (X), \tag{24}$$

$J_0 (X)$ и $J_1 (X)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядков.

На рис. 5 приведены зависимости $i_{1m}/2I_0 = f(s)$, рассчитанные согласно (22) и (23) при различных значениях $\omega_p q/\omega$. В этих расчетах полагалось $u_{10}/u_0 = 0{,}01$, $i_{10}/I_0 = 0{,}05$. Область применения приведенных соотношений ограничена весьма жесткими условиями (20). Характеристики группировки при больших значениях $k_p qz$ можно легко определить в частном случае, когда $i_{10} = 0$ и возбуждение в дрейфе производится за счет модуляции электронов по скорости. При этом пролетный угол электрона в дрейфе

$$\omega (t_1 - t_0) = \omega \int_0^s \frac{dz}{u_0 + u_{10} \operatorname{ch} k_p qz \sin \omega t_0} \tag{25}$$

и при $m = u_{10}/u_0 \ll 1$, что всегда выполнимо на практике,

$$\Theta = \omega\tau - \frac{\omega}{\omega_p q} \ln \left[ \frac{1 + m \operatorname{ch} k_p qs \sin \omega t_0}{1 + m \sin \omega t_0} \right]. \tag{26}$$

На рис. 6 приведены зависимости $\omega t_1 = f(\omega t_0)$, определяемые выражением (26) при $m \operatorname{ch} k_p qs = 0{,}05$; 0,1; 0,15 и $\omega_p q/\omega = 0{,}072$. Пунктирными кривыми приведены зависимости $\omega t_1 = f(\omega t_0)$, рассчитанные по формуле (21) для $m \operatorname{ch} k_p qs = 0{,}15$. Сопоставление приведенных зависимостей подтверждает возможность применения выражений (21) — (23) для приближенной оценки первой гармоники тока.

Из рассмотрения зависимостей $i_{1m} = f(s)$ следует, что при прочих равных условиях выбором длины дрейфа с индуктивной реакцией можно менять характер частотной зависимости усиления $K = i_1 (f, s)/i_{10}$. Так, при малой длине дрейфа, когда условию оптимальной группировки соответствуют большие величины $k_p q$, коэффициент усиления быстро уменьшается при увеличении $B_L/\omega\varepsilon$, т. е. при уменьшении частоты по сравнению с резонансной ($\omega = \omega_0$). При такой длине дрейфа, когда оптимум группировки достигается на частоте $\omega_1 < \omega_0$, характеристика усиления будет иметь максимум на частоте, близкой к $\omega_1$. В области

частот $\omega_0 > \omega > \omega_1$ из-за перегруппировки ($X > X_{0m}$) усиление в индуктивном дрейфе будет уменьшаться. При неизменной длине индуктивного дрейфа и прочих равных условиях характер частотной зависимости усиления определяется зависимостями $u_{10}(f)$ и $i_{10}(f)$, т. е. выбором режима работы и характеристиками секции возбудителя. Так, например, если $u_{10}$ и $i_{10}$ возрастают с уменьшением частоты, то можно получить достаточно малые вариации коэффициента усиления в индуктивном дрейфе в широкой полосе частот.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, Изд. Советское радио, 1952.
2. C. K. Birdsell, J. R. Whinnery, J. Appl. Phys., 1953, **24**, 3, 314.
3. E. Nalos, IRE Trans., 1958, **ED-5**, 3, 161.
4. C. K. Birdsell a. oth., Proc. I. R. E., 1953, **41**, 7, 865.

Поступила в редакцию
22 IV 1960

1961 № 2

# РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ФОКУСИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЛАМПЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

*А. Л. Игрицкий*

Дан метод расчета магнитной системы для периодической фокусировки пучка электронов в ЛБВ, позволяющий учесть влияние материала и размеров полюсных наконечников, а также конечного числа магнитов на величину индукции получаемого периодического поля. Метод позволяет также учесть влияние нарушения периодичности и концов устройства на величину индукции.

Расчет произведен методом последовательных приближений. Описанный метод обеспечивает лучшее совпадение результатов расчета с опытом.

## ВВЕДЕНИЕ

Использование периодических магнитных полей для фокусировки пучка электронов в лампах бегущей волны (ЛБВ) позволяет существенно снизить габариты и вес фокусирующего устройства, а также устраняет необходимость в источниках питания. Схема устройства для периодической фокусировки показана на рис. 1. Постоянные кольцевые магниты $M$ намагничиваются каждый в отдельности в осевом направлении и затем складыва-

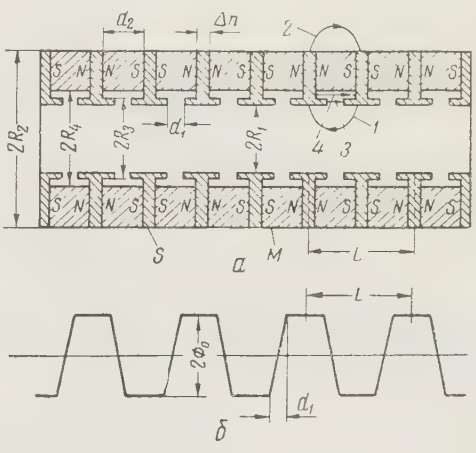



Рис. 1:

*а* — эскиз периодического магнитного фокусирующего устройства: $M$ — магнит, $S$ — полюсный наконечник, *1, 2, 3, 4* — пути для потоков $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$ и $\phi_4$ соответственно; *б* — распределение магнитного потенциала на радиусе $R = R_1$.

ются так, чтобы северный полюс был обращен к северному и южный к южному. Между постоянными магнитами устанавливаются полюсные наконечники $S$ из материала, обладающего достаточно высокой индукцией насыщения (например из стали армко). Полюсные наконечники способствуют созданию более симметричного поля и позволяют получить большие индукции поля вдоль оси.

Расчет периодического фокусирующего устройства имеет целью определить оптимальные форму и размеры основных элементов магнитной системы: постоянных магнитов и полюсных наконечников. Метод расчета периодических фокусирующих устройств изложен в работах [1, 2].

Как показали исследования, расчеты периодических систем, выполненные по этому методу, дают значения индукции выше опытных значений на 20—40%. Основной причиной расхождения расчета с опытом является то, что метод расчета, изложенный в [1, 2], не учитывает влияние магнитного сопротивления полюсных наконечников на величину индукции, между тем как оно может быть достаточно большим.

## 1. РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

При расчете магнитной системы в первом приближении мы пренебрегаем магнитным сопротивлением полюсных наконечников. Из рис. 1 видно, что полюсные наконечники представляют собой ряд цилиндров одинакового диаметра, причем магнитные потенциалы соседних цилиндров противоположны и равны $\pm\Phi_0$, а в промежутке между ними на радиусе $r = R_1$ потенциал меняется по линейному закону (см. рис. 1,*б*). Распределение магнитного потенциала во внутренней области между полюсными наконечниками в этом случае можно получить, решив уравнение Лапласа; оно имеет вид [1]

$$\Phi(z; r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Phi_0}{\sigma_1 (n\pi)^2} \frac{J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} r\right)}{J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)} (1 - \cos n\pi) \sin(n\pi\sigma_1) \sin\left(\frac{2n\pi}{L} z\right), \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \frac{d_1}{L}. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) $L$—период магнитного поля; $R_1$—внутренний радиус полюсных наконечников; $d_1$—расстояние между полюсными наконечниками; $J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} r\right)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка с мнимым аргументом.

Составляющую индукции магнитного поля вдоль оси $z$ можно определить как градиент магнитного потенциала, и по абсолютной величине она равна

$$B_z = \mu_0 \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Phi_0\mu_0 (1 - \cos n\pi)}{L J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)} \frac{\sin(n\pi\sigma_1)}{n\pi\sigma_1} J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} r\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} z\right). \quad (3)$$

Магнитное поле вдоль оси $z$ (при $r = 0$) будет меняться по закону

$$B_{z_0} = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Phi_0 (1 - \cos n\pi)}{L J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)} \frac{\sin(n\pi\sigma_1)}{n\pi\sigma_1} \cos\left(\frac{2n\pi}{L} z\right). \quad (4)$$

Общий магнитный поток в плоскости $z = 0$ между полюсными наконечниками во внутренней области

$$\psi_1 = \int_0^{R_1} B_z 2\pi r dr = 2\Phi_0 P_1. \quad (5)$$

Здесь $P_1$ — магнитная проводимость для потока $\psi_1$:

$$P_1 = \mu_0 \sum_{n-1}^{\infty} \frac{-iJ_1\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)}{J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)} \frac{\sin n\pi\sigma_1}{n\pi\sigma_1} \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n} R_1; \quad (6)$$

$J_1\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)$ — функция Бесселя первого рода, первого порядка с мнимым аргументом.

На величину максимально достижимого поля вдоль оси существенно влияет также поток рассеяния, который имеет место за пределами кольцевых магнитов при $R > R_2$.

Поток рассеяния между полюсными наконечниками во внешней области подсчитывается так же, как и полезный поток во внутренней области,

и для него получается формула [1]

$$\psi_2 = 2\Phi_0 P_2. \tag{7}$$

Здесь $P_2$ — магнитная проводимость для потока рассеяния:

$$P_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-H_1^{(1)}\left(i\frac{2n\pi}{L}R_2\right)}{iH_0^{(1)}\left(i\frac{2n\pi}{L}R_2\right)} \frac{\sin(n\pi\sigma_2)}{n\pi\sigma_2} \frac{2(1-\cos n\pi)}{n} R_2, \tag{8}$$

$$\sigma_2 = \frac{d_2}{L}. \tag{9}$$

В формулах (8) и (9) $R_2$ — внешний радиус магнита; $d_2$ — толщина одного магнита; $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ — функции Ханкеля первого рода, нулевого и первого порядков соответственно.

Кроме магнитных потоков $\psi_1$ и $\psi_2$ в фокусирующей системе существуют магнитный поток $\psi_3$ между торцами кольцевых полюсных наконечников и поток $\psi_4$ в зазоре между кольцом полюсного наконечника и внутренней поверхностью магнита.

Пути этих потоков на рис. 1 обозначены цифрами *3* и *4*. Проводимости для потоков $\psi_3$ и $\psi_4$ в соответствии с рис. 1 можно подсчитать по формулам

$$P_3 = \mu_0 \frac{\pi(R_3^2 - R_1^2)}{d_1}, \tag{10}$$

$$P_4 = \mu_0 \frac{\pi(R_4^2 - R_3^2)}{d_2}. \tag{11}$$

Здесь $R_3$ — внешний радиус кольцевого полюсного наконечника; $R_4$ — внутренний радиус постоянного кольцевого магнита.

Общая магнитная проводимость между полюсными наконечниками

$$P_0 = \sum_{i=1}^{4} P_i. \tag{12}$$

Если разность магнитных потенциалов между полюсными наконечниками равна $2\Phi_0$, то каждый магнит будет создавать магнитный поток

$$\psi_0 = 2\Phi_0 P_0. \tag{13}$$

Индукция в постоянном магните

$$B_m = \frac{2\Phi_0 P_0}{\pi(R_2^2 - R_4^2)}. \tag{14}$$

Предположим, что напряженность магнитного поля постоянна по длине магнита; тогда из определения напряженности как градиента потенциала можно написать

$$H_m d_2 = 2\Phi_0, \tag{15}$$

где $H_m$ — напряженность поля в постоянном магните.

Из (14) и (15) получаем соотношение между индукцией и напряженностью поля в постоянном магните:

$$\frac{B_m}{H_m} = \frac{d_2 P_0}{\pi(R_2^2 - R_4^2)}. \tag{16}$$

С другой стороны, $B_m$ и $H_m$ связаны между собой кривой размагничивания $B = f(H)$. На рис. 2 показана кривая размагничивания для анизотропного ферроксдюра. Если принять, что все размеры магнитной системы заданы, можно вычислить правую часть уравнения (16). Проводя на графике $B = f(H)$ через начало координат прямую под углом

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{d_2 P_0}{\pi (R_2^2 - R_4^2)}, \qquad (17)$$

найдем рабочую точку постоянного магнита (см. рис. 2). Зная значения $H_m$ и $B_m$ в рабочей точке, можем заключить, насколько близка к оптимальным условиям работа магнитов. Уравнения (15) и (4) позво-

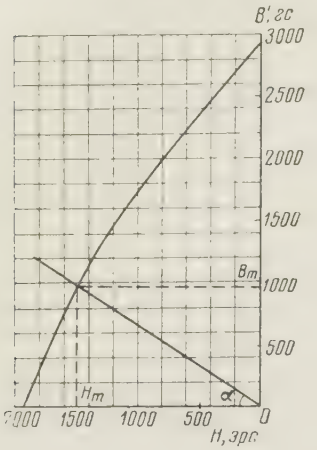



Рис. 2. Кривая размагничивания для анизотропного ферроксдюра $B = f(H)$

ляют построить распределение магнитного поля вдоль оси периодического фокусирующего устройства.

В результате расчета магнитной системы в первом приближении мы определяем также потоки $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ и $\psi_4$, которые будут использованы для расчета магнитной цепи во втором приближении.

## 2. РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

При подобном расчете магнитной цепи учтем магнитное сопротивление материала полюсных наконечников. На рис. 3 показано распределение магнитных потоков в полюсном наконечнике периодического устройства. Из рисунка нетрудно заключить, что должен существовать некоторый разделительный радиус $R_p$. Силовые линии, которые выходят из магнита при $R > R_p$, будут образовывать поток рассеяния

$$\psi_2 = B_m \pi (R_2^2 - R_p^2), \qquad (18)$$

а силовые линии, выходящие из магнита при $R < R_p$, образуют поток

$$\psi_B = \psi_1 + \psi_3 + \psi_4 = B_m \pi (R_p^2 - R_4^2). \qquad (19)$$

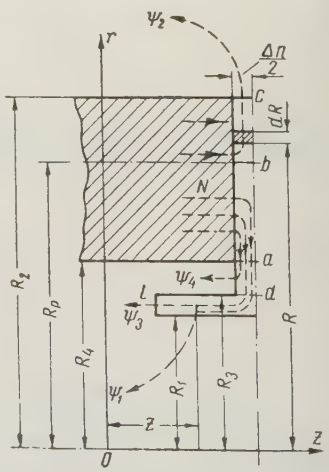



Рис. 3. Распределение магнитных потоков в полюсном наконечнике периодического устройства

Из уравнений (18) и (19) величина разделительного радиуса равна

$$R_p = \sqrt{\frac{\psi_B R_2^2 + \psi_2 R_4^2}{\psi_2 + \psi_B}}. \qquad (20)$$

В уравнении (20) потоки $\psi_B$ и $\psi_2$ известны из расчета в первом приближении.

На различных участках полюсного наконечника протекают разные потоки, поэтому мы разобьем его на четыре участка *ba*, *bc*, *ad* и *de*. В первую очередь определим падения магнитного потенциала на отдельных участках.

Участок *bc*. На этом участке протекает поток рассеяния, величина которого меняется от нуля при $R = R_p$ до $\psi_2$ при $R = R_2$. Через сечение радиуса $R$, как видно из рис. 3, протекает поток $\psi_2$ за вычетом потока, входящего в полюсный наконечник выше сечения радиуса $R$:

$$\psi_R = \psi_2 - B_m \pi (R_2^2 - R^2). \tag{21}$$

Индукция в сечении $R$ полюсного наконечника

$$B_R = \frac{\psi_2 - B_m \pi (R_2^2 - R^2)}{2\pi R \frac{\Delta_п}{2}}. \tag{22}$$

Здесь $B_m$ — индукция в постоянном магните, известная из расчета в первом приближении; $\Delta_п$ — толщина полюсного наконечника (см. рис. 1).

Пользуясь кривой намагничивания $B = f(H)$ материала полюсных наконечников *, по значению $B_R$ можем найти соответствующее значение $H_R$. Задаваясь несколькими значениями $R$ на участке *bc*, можем вычислить для них значения $B_R$ и построить зависимость $H_R = f_{bc}(R)$. Падение магнитного потенциала на участке *bc*

$$U_{bc} = \int_{R_p}^{R_2} H_R \, dR = \int_{R_p}^{R_2} f_{bc}(R) \, dR. \tag{23}$$

Этот интеграл может быть вычислен одним из приближенных методов, так как $H_R = f_{bc}(R)$ дано в виде таблицы или графика.

Совершенно аналогично вычисляется падение магнитного потенциала на участках *ba* и *ad*.

Участок *ba*. На участке *ba* протекает внутренний поток, причем величина его меняется от нуля при $R = R_p$ до $\psi_B = \psi_1 + \psi_3 + \psi_4$ при $R = R_4$. Через сечение радиуса $R$ протекает поток $\psi_B$ за вычетом потока, входящего в полюсный наконечник из магнита ниже сечения радиуса $R$:

$$\psi_R = \psi_B - B_m \pi (R^2 - {}^{2}_{4}. \tag{24}$$

Индукция в сечении радиуса $R$

$$B_R - \frac{\psi_B - B_m \pi (R^2 - R_4^2)}{\pi R \Delta_п}. \tag{25}$$

Вычисляя значения $B_R$ для нескольких значений $R$ и пользуясь кривой намагничивания, можем построить график $H_R = f_{ba}(R)$ для участка *ba*. Падение магнитного потенциала на участке *ba*

$$U_{ba} = \int_{R_4}^{R_p} H_R \, dR = \int_{R_4}^{R_p} f_{ba}(R) \, dR. \tag{26}$$

Участок *ad*. На участке *ad* протекает внутренний поток, величина которого меняется от $\psi_B = \psi_1 + \psi_3 + \psi_4$ при $R = R_4$ до $\psi_1 + \psi_3$ при $R = R_3$. Через сечение радиуса $R$ протекает поток $\psi_B$ за вычетом потока, ответвляющегося в зазор между полюсными наконечниками по

* Если полюсные наконечники после их изготовления не отжигаются, то для учета возможного образования наклепа желательно снимать кривую намагничивания материала на образцах, имеющих такую же толщину, что и полюсные наконечники.

пути $\psi_4$ на участке между $R_4$ и $R$ (см. рис. 3):

$$\psi_R = \psi_B - B\pi (R_4^2 - R^2). \tag{27}$$

Здесь $B$ — индукция в зазоре между полюсными наконечниками по пути $\psi_4$:

$$B = \mu_0 \frac{2\Phi_0}{d_2} = \mu_0 H_m. \tag{28}$$

В абсолютной системе единиц $\mu_0 = 1$, и индукция в зазоре по пути $\psi_4$ численно равна напряженности поля в магните.

Индукция в сечении полюсного наконечника радиуса $R$

$$B_R = \frac{\psi_B - H_m \pi (R_4^2 - R^2)}{\pi R \Delta_{\text{п}}}. \tag{29}$$

Вычисляя значения $B_R$ для нескольких значений $R$ и пользуясь кривой намагничивания, можем построить график $H_R = f_{ad}(R)$ для участка $ad$. Падение магнитного потенциала на участке $ad$

$$U_{ad} = \int_{R_3}^{R_4} f_{ad}(R)\,(dR). \tag{30}$$

Участок $de$. На участке $de$ через полюсный наконечник протекает поток, величина которого меняется от $\psi_1 + \psi_3$ в точке $d$ до $\psi_3$ на торце полюсного наконечника (точке $e$). Через кольцевое сечение полюсного наконечника, отстоящее от центральной плоскости зазора на расстоянии $z$, проходят поток $\psi_3$ и часть потока $\psi_1$, которая выходит с внутренней поверхности цилиндра полюсного наконечника до точки с координатой $z$:

$$\psi_z = \psi_3 + \int_0^z B_r (R_1; z)\, 2\pi R_1\, dz. \tag{31}$$

Здесь $B_r(R_1; z)$ — радиальная составляющая индукции на внутренней поверхности цилиндра полюсного наконечника. Ее можно определить как градиент магнитного потенциала из уравнения (1); по абсолютной величине она будет равна

$$B_r(r; z) = \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} =$$

$$= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-iJ_1\left(i\frac{2n\pi}{L} r\right)}{J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)} \frac{\sin n\pi\sigma_1}{n\pi\sigma_1} \frac{4\Phi_0 (1 - \cos n\pi)}{L} \sin\left(\frac{2n\pi}{L} z\right). \tag{32}$$

Подставляя значение $B_r$ в уравнение (31) и производя интегрирование, в итоге получим

$$\psi_z = \psi_3 +$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-iJ_1\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)}{J_0\left(i\frac{2n\pi}{L} R_1\right)} \frac{\sin n\pi\sigma_1}{n\pi\sigma_1} \frac{4\Phi_0 (1 - \cos n\pi)}{n} R_1 \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L} z\right)\right]. \tag{33}$$

Индукция в сечении полюсного наконечника с координатой $z$

$$B_z = \frac{\psi_z}{\pi (R_3^2 - R_1^2)}. \tag{34}$$

Вычисляя значения $B_z$ для нескольких значений $z$ и пользуясь кривой намагничивания материала полюсных наконечников, можем построить график $H_z = f_{de}(z)$ для участка $de$. Падение магнитного потенциала на участке $de$

$$U_{de} = \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{L}{4}} H_z\, dz = \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{L}{4}} f_{de}(z)\, dz. \tag{35}$$

Если падение магнитного потенциала на участке $de$ значительно, то это поведет к изменению распределения магнитного потенциала на радиусе $R = R_1$ (см. рис. 1, *б*), и может оказаться целесообразным вместо формулы (1), полученной для трапецеидального распределения потенциала при $R = R_1$, вывести новую формулу для $\Phi(z;\ r)$.

Для отдельного магнита периодической системы можно дать эквивалентную схему замещения [3, 4], представленную на рис. 4. Здесь $R_1$ учитывает сопротивление путей внутреннего потока по воздуху:

$$R_1 = \frac{2\Phi_0}{\psi_B} = \frac{1}{P_1 + P_3 + P_4}. \tag{36}$$

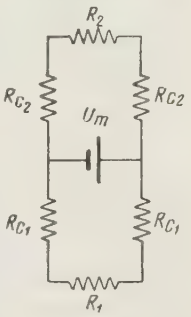



Рис. 4. Эквивалентная схема замещения отдельного магнита в периодическом устройстве

Величина $R_{c1}$ учитывает сопротивление путей внутреннего потока по стали. Это сопротивление будем относить к потоку $\psi_B$ и оно равно

$$R_{c1} = \frac{U_{ba} + U_{ad} + U_{de}}{\psi_B}. \tag{37}$$

Здесь $U_{ba}$, $U_{ad}$ и $U_{de}$ — падения магнитного потенциала на соответствующих участках, величины которых были определены выше.

Величина $R_2$ представляет собой сопротивление по воздуху для потока рассеяния $\psi_2$:

$$R_2 = \frac{2\Phi_0}{\psi_2} = \frac{1}{P_2}. \tag{38}$$

Сопротивление $R_{c2}$ учитывает сопротивление стали для потока рассеяния $\psi_2$:

$$R_{c2} = \frac{U_{bc}}{\psi_2}. \tag{39}$$

Пользуясь эквивалентной схемой, определим суммарное сопротивление магнитной цепи

$$R_\Sigma = \frac{R_{э1} R_{э2}}{R_{э1} + R_{э2}}. \tag{40}$$

Здесь $R_{э1} = R_1 + 2R_{c1}$ — эквивалентное сопротивление для внутреннего магнитного потока; $R_{э2}$ — то же для потока рассеяния.

На основании магнитного закона Ома поток, создаваемый магнитом,

$$\psi = B_m \pi (R_2^2 - R_4^2) = \frac{H_m d_2}{R_\Sigma}. \tag{41}$$

Из (41) получаем соотношение между индукцией $B_m$ и напряженностью поля $H_m$ в магните во втором приближении:

$$\frac{B_m}{H_m} = \frac{d_2}{\pi (R_2^2 - R_4^2) R_\Sigma} = \operatorname{tg} \alpha_э. \tag{42}$$

С другой стороны, $B_m$ и $H_m$ связаны между собой кривой размагничивания $B = f(H)$, показанной на рис. 2. Проводя на графике $B = f(H)$ через начало координат прямую под углом

$$\alpha_э = \operatorname{arc\,tg} \frac{d_2}{\pi (R_2^2 - R_4^2) R_\Sigma}, \tag{43}$$

найдем рабочую точку постоянного магнита во втором приближении.

Мдс, создаваемая магнитом:

$$U_m = H_m d_2. \tag{44}$$

Величину индукции магнитного поля на оси во втором приближении можно определить по формуле (4), если вместо разности потенциалов между полюсными наконечниками $2\Phi_0$ подставить падение магнитного потенциала на сопротивлении $R_1$, которое, как нетрудно видеть, равно

$$U_{R_1} = \frac{H_m d_2}{R_1 + 2R_{c_1}} R_1. \tag{45}$$

Если расчетное значение $B_{z0}$ во втором приближении мало отличается от значения $B_{z0}$, полученного в первом приближении, то на этом расчет можно считать законченным. Если же получаются существенные расхождения, то расчет следует повторить, исходя уже из новых значений мдс и потоков, полученных во втором приближении.

### 3. ВЛИЯНИЕ КОНЦОВ ФОКУСИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

В случае учета магнитного сопротивления полюсных наконечников магнитные цепи отдельных постоянных магнитов оказываются связанными друг с другом, и для всей периодической фокусирующей системы можно дать эквивалентную схему замещения, показанную на рис. 5. Расчет

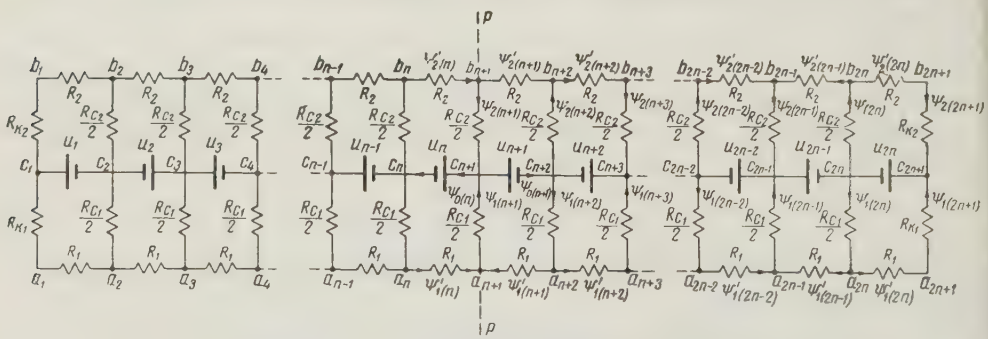


Рис. 5. Эквивалентная схема замещения фокусирующей системы

такой схемы замещения позволит оценить взаимное влияние магнитов друг на друга, а также учесть влияние концов фокусирующей системы на распределение поля в ней.

Число магнитов в фокусирующем устройстве следует брать четным, так как в этом случае противоположно направленные поля отдельных магнитов будут взаимно компенсировать друг друга и вдоль оси фокусирующего устройства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_z dz = 0$$

без появления добавочных нежелательных хвостов магнитного поля на концах устройства. Ради простоты будем считать периодическое фокусирующее устройство симметричным по краям. Вследствие симметрии можем считать, что мдс магнитов, равноудаленных от концов, равны

$$U_1 = U_{2n}; \quad U_2 = U_{2n-1}; \ldots U_k = U_{2n-k+1} \ldots U_n = U_{n+1}.$$

Магнитные потоки:

$$\psi'_{1(n)} = \psi'_{1(n+1)}; \quad \psi'_{2(n)} = \psi'_{2(n+1)}; \quad \psi'_{0(n)} = \psi_{0(n+1)}.$$

Таким образом, достаточно произвести расчет лишь половины схемы, например справа от плоскости симметрии $PP$. Потоки и мдс слева найдутся из условий симметрии. Расчет схемы, представленной на рис. 5, удобно вести методом последовательных приближений. В первом приближении считаем мдс постоянных магнитов и сопротивления путей потоков по железу одинаковыми и известными. Величины мдс и сопротивлений определяются по формулам (44), (37) и (39). Требуется определить магнитные потоки, протекающие по различным звеньям магнитной цепи.

Для нижнего контура с номером $n + 1$ и последующих на основании второго закона Кирхгофа [4] можно написать уравнения

$$\begin{aligned}
&\psi_{1(n+1)}\frac{R_{c1}}{2} + \psi'_{1(n+1)}R_1 + \psi_{1(n+2)}\frac{R_{c1}}{2} = U,\\
&\psi_{1(n+2)}\frac{R_{c1}}{2} + \psi'_{1(n+2)}R_1 + \psi_{1(n+3)}\frac{R_{c1}}{2} = U,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_{1(n+k)}\frac{R_{c1}}{2} + \psi'_{1(n+k)}R_1 + \psi_{1(n+k+1)}\frac{R_{c1}}{2} = U,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_{1(2n)}\frac{R_{c1}}{2} + \psi'_{1(2n)}R_1 + \psi_{1(2n+1)}R_{k1} = U.
\end{aligned} \tag{46}$$

Применяя первый закон Кирхгофа к узлам $a_{n+1}$, $a_{n+2}$ и т. д., получим

$$\begin{aligned}
&\psi'_{1(n+1)} = \psi'_{1(n)} = \frac{\psi_{1(n+1)}}{2},\\
&\psi'_{1(n+2)} = \psi_{1(n+2)} - \psi'_{1(n+1)} = \psi_{1(n+2)} - \frac{1}{2}\psi_{1(n+1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi'_{1(n+k)} = \psi_{1(n+k)} - \psi'_{1(n+k-1)} =\\
&= \psi_{1(n+k)} - \psi_{1(n+k-1)} + \ldots - \psi_{1(n+3)} + \psi_{1(n+2)} - \frac{1}{2}\psi_{1(n+1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi'_{1(2n)} = \psi_{1(2n+1)} = \psi_{1(2n)} - \psi'_{1(2n-1)} =\\
&= \psi_{1(2n)} - \psi_{1(2n-1)} + \ldots - \psi_{1(n+3)} + \psi_{1(n+2)} - \frac{1}{2}\psi_{1(n+1)}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Последние два уравнения справедливы при $k$ и $n$ — четных. Подставляя значения потоков из (47) в (46), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\psi_{1(n+1)}(R_{c1} + R_1) + \psi_{1(n+2)}\frac{R_{c1}}{2} = U,\\
&\psi_{1(n+2)}\left(\frac{R_{c1}}{2} + R_1\right) - \frac{1}{2}\psi_{1(n+1)}R_1 + \psi_{1(n+3)}\frac{R_{c1}}{2} = U,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\psi_{1(n+k)}\left(\frac{R_{c1}}{2}+R_1\right)-\psi_{1(n+k-1)}R_1+\cdots+\psi_{1(n+2)}R_1- \tag{48}$$

$$-\frac{1}{2}\psi_{1(n+1)}R_1+\psi_{1(n+k+1)}\frac{R_{c1}}{2}=U,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_{1(2n)}\left(\frac{R_{c1}}{2}+R_1+R_k\right)-\psi_{1(2n-1)}(R_1+R_k)+$$

$$+\cdots+\psi_{1(n+2)}(R_1+R_k)-\frac{1}{2}\psi_{1(n+1)}(R_1+R_k)=U.$$

Таким образом мы получили систему $n$ уравнений с $n$ неизвестными потоками $\psi_{1(n+1)}$, $\psi_{1(n+2)}$, $\cdots$ $\psi_{1(2n)}$.

Решение этой системы уравнений обычным способом при помощи определителей связано с большими вычислительными трудностями. Однако решение чрезвычайно упрощается, если использовать следующий приближенный метод. Обычно сопротивление материала полюсных наконечников $R_{c1}/2$ значительно меньше сопротивления $R_1$ для потока по воздуху, потоки же $\psi_{1(n+1)}$, $\psi_{1(n+2)}$ и т. д. мало отличаются друг от друга. Поэтому с достаточной точностью в первом уравнении системы (48) можно пренебречь вторым слагаемым. Поток $\psi_{1(n+1)}$ в первом приближении тогда будет равен

$$\psi_{1(n+1)\mathrm{I}}=\frac{2U}{R_{c1}+R_1}. \tag{49}$$

Подставляя полученное значение $\psi_{1(n+1)\mathrm{I}}$ во второе уравнение системы и пренебрегая в нем третьим слагаемым, найдем $\psi_{1(n+2)\mathrm{I}}$ и т. д. Таким образом, последовательно можно найти все потоки. Если желательно определить те же потоки более точно, то найденные значения потоков в первом приближении должны быть использованы для нахождения потоков во втором приближении. Так, поток $\psi_{1(n+1)}$ во втором приближении определится по формуле

$$\psi_{1(n+1)\mathrm{II}}=\frac{2\left[U-\psi_{1(n+2)\mathrm{I}}\dfrac{R_{c1}}{2}\right]}{R_{c1}+R_1}. \tag{50}$$

Аналогично можно найти и остальные потоки.

Мы рассмотрели методику определения внутренних потоков магнитной системы $\psi_1$. Совершенно аналогичные уравнения можно получить и для потоков рассеяния $\psi_2$. Для этого второй закон Кирхгофа следует применять к верхним контурам с номерами $n+1$ и последующим. Первый закон Кирхгофа следует применять к узлам $b_{n+1}$, $b_{n+2}$ и т. д. Полученная система уравнений решается так же, как это было описано выше.

Определив потоки $\psi_{1(n+k)}$ и $\psi_{2(n+k)}$, без особого труда можно вычислить потоки и в остальных звеньях магнитной цепи. Можно определить рабочие точки и мдс отдельных магнитов периодической системы. Если полученные значения потоков и мдс мало отличаются от значений, определенных в § 2, то на этом расчет можно считать законченным. Если же расхождение существенно, то можно рассчитать еще одно приближение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье дан метод расчета магнитной системы для периодической фокусировки пучка электронов в ЛБВ. Основное его отличие от применявшегося до сих пор метода Чена состоит в учете магнитного сопротивления

полюсных наконечников. Описанный метод дает возможность учесть влияние материала и размеров полюсных наконечников на величину индукции получаемого периодического поля. Он позволяет учесть влияние нарушения периодичности и концов устройства на величину индукции и обеспечивает лучшее совпадение результатов расчета с опытом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. K. N. Chang, Optimum design of periodic magnet structures for electron beam focusing, RCA Rev., 1955, **16**, 1, 65.
2. F. Sterzer, W. W. Siekanowicz, The design of periodic permanent magnets for focusing of electron beams, RCA Rev., 1957, **18**, 1, 39.
3. М. А. Бабиков, Электрические аппараты, ч. I, ГЭИ, 1951.
4. А. Я. Буйлов, Основы электроаппаратостроения, ГЭИ, 1946.
5. Ротерс, Электромагнитные механизмы, ГЭИ, 1949.

Поступила в редакцию
29 II 1960

1961 № 2

# НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ В ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ

*Г. Д. Лобов, В. И. Еремеев*

Экспериментально сравнены характеристики детектирования колебаний СВЧ в газовом разряде с характеристиками избыточного свечения того же разряда. Оба эффекта исследовались для гелиевого и неонового наполнений газоразрядных трубок при различных мощностях и токах разряда.

## ВВЕДЕНИЕ

Действие электромагнитного поля СВЧ на газовый разряд уже описано в литературе. Указано, например, что при наложении колебаний СВЧ на газоразрядную трубку меняется как величина разрядного тока [1], так и уровень свечения газа [2, 3]. В настоящей работе увеличение свечения возбуждения атомов и уменьшение свечения рекомбинации в поле СВЧ исследовано в связи с процессом детектирования в тлеющем разряде.

## ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальное исследование эффектов свечения возбуждения и гашения свечения рекомбинации проводилось по блок-схеме, показанной на рис. 1.

Импульсы колебаний СВЧ длительностью $\tau_и = 10$ *мксек* подавались на газоразрядный детектор по волноводу. Для исследования влияния

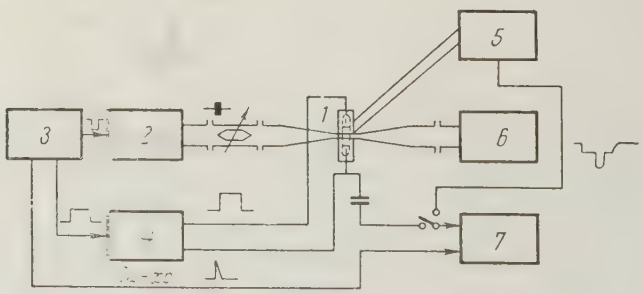



Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

*1*—газоразрядный детектор; *2*—генератор колебаний СВЧ; *3*—синхронизатор; *4*—питание газоразрядного детектора; *5*—фотоумножитель с блоком питания; *5*—измеритель мощности; *7*—осциллограф

мощности СВЧ на различные участки разряда волновод в месте установки газоразрядного детектора был сужен до щели. Благодаря этому колебания СВЧ можно было подавать на узкие участки газового разряда. Газоразрядный детектор представлял собой стеклянную трубку с плоскими металлическими электродами, между которыми возбуждался тлеющий разряд. Трубка наполнялась инертным газом.

Тлеющий разряд в детекторе мог возникать как при постоянном напряжении, так и при подаче специальных поджигающих импульсов длительностью $\tau_{под} = 75$ *мксек*. При таком поджиге газоразрядного детек-

тора импульсы колебаний СВЧ могли подаваться в различные моменты времени, в том числе и во время послесвечения газа.

Свечение тлеющего разряда и все изменения этого свечения под действием поля СВЧ улавливались при помощи фотоумножителя через щель в узкой стенке волновода. Напряжения с фотоумножителя и нагрузочного сопротивления газоразрядного детектора подавались на осциллограф.

## 2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При действии на разряд колебаний СВЧ достаточно большой мощности во всех случаях интенсивность свечения в месте действия импульса СВЧ увеличивалась. Это увеличение свечения было разным для неона и гелия. С уменьшением мощности колебаний СВЧ свечение падало до нуля, а потом появлялся импульс обратной полярности, т. е. импульс гашения, вызванный уменьшением свечения рекомбинации.

На рис. 2 представлены осциллограммы напряжения на выходе фотоэлектронного умножителя, полученные при воздействии колебаний СВЧ

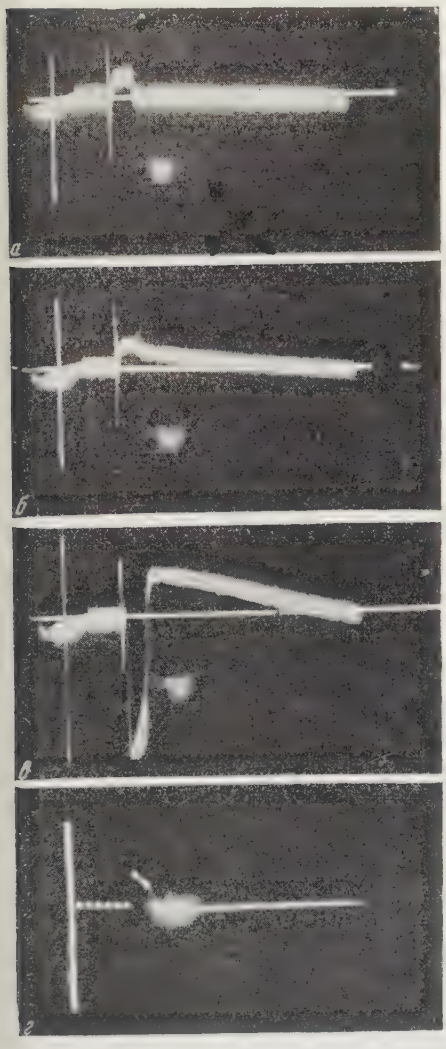



Рис. 2

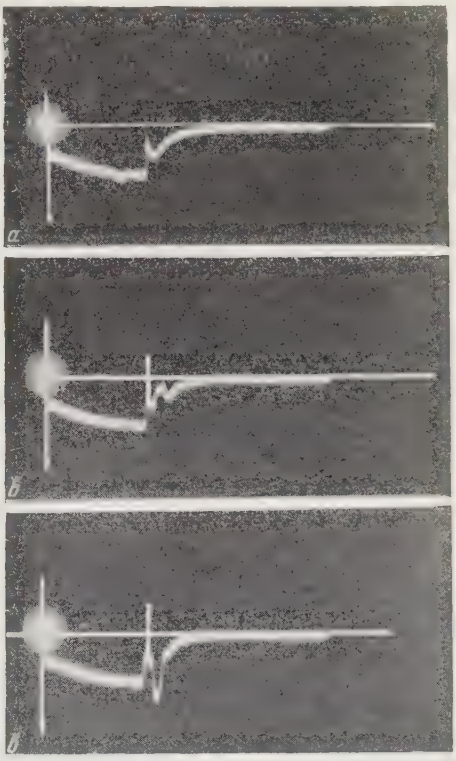



Рис. 3

Рис. 2. Осциллограммы импульсов гашения и увеличения свечения для разряда на постоянном напряжении в гелии, $p = 9$ *мм* рт. ст., $\tau_и = 20$ *мксек*. Снято при различных значениях мощности колебаний СВЧ:

$а - P/P_m = 0{,}01$; $б - P/P_m = 0{,}05$; $в - P/P_m = 1$; $г$ — импульс газоразрядного детектора

Рис. 3. Осциллограммы импульсов гашения и увеличения свечения в послесвечении неона для колебаний СВЧ различной мощности, $p = 21$ *мм* рт. ст., $\tau_и = 10$ *мксек*, $\tau_{под} = 75$ *мксек*:

$а - P = 0$ *вт*; $б - P/P_m = 0{,}08$; $в - P/P_m = 1$

различной мощности на разряд, созданный постоянным напряжением в гелии. Осциллограммы представлены в порядке возрастания мощности подводимых колебаний СВЧ. При малых мощностях виден импульс гашения свечения рекомбинации в месте воздействия импульса СВЧ (рис. 2,*а*).

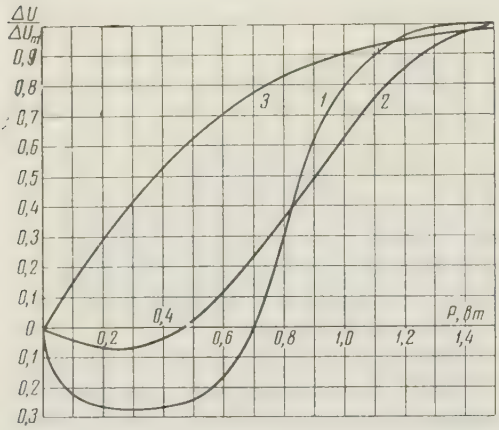



Рис. 4. Зависимость величины импульсов на выходе фотоэлектронного умножителя ($\Delta U_ф$) и газоразрядного детектора ($\Delta U_д$) от мощности для газоразрядной трубки, наполненной гелием, $p = 9$ *мм* рт. ст., $\tau_и = 10$ *мксек*, $\tau_{под} = 75$ *мксек*:

*1* — зависимость $\Delta U_ф (P)$, импульс СВЧ приходит во время послесвечения; *2* — $\Delta U_ф (P)$ при наложении энергии СВЧ во время действия поджигающего импульса; *3* — зависимость $\Delta U_д (P)$

С увеличением мощности колебаний СВЧ задний фронт импульса постепенно размывается. Это можно объяснить тем, что электроны, получив энергию во время импульса, сохраняют ее некоторое время и после прекращения импульса, что уменьшает вероятность рекомбинации. Это уменьшение рекомбинации тем больше, чем больше мощность подведенных колебаний СВЧ. При дальнейшем увеличении мощности колебаний на

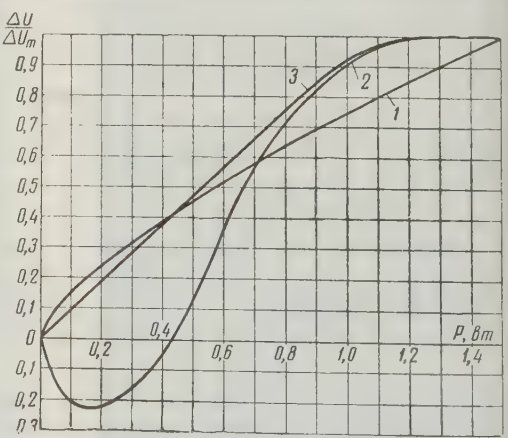



Рис. 5. Зависимость величин импульсов на выходе фотоэлектронного умножителя ($\Delta U_ф$) и газоразрядного детектора ($\Delta U_д$) от мощности колебаний СВЧ, подводимых к газоразрядной неоновой трубке, $p$=21 *мм* рт. ст., $\tau_и$ =10 *мксек*, $\tau_{под} = 75$ *мксек*:

*1* — $\Delta U_ф (P)$ для послесвечения; *2* — $\Delta U_ф (P)$ для поджига; *3* — $\Delta U_д (P)$

месте импульса гашения появляется импульс увеличенного свечения возбуждения, сопровождающийся заметным выбросом после импульса.

У трубки, наполненной неоном, импульс гашения при разряде на постоянном напряжении не наблюдался.

Для более четкого наблюдения свечения рекомбинации был применен импульсный поджиг газоразрядного детектора. На рис. 3 приведены снятые при этом осциллограммы для трубки, наполненной неоном. Осциллограммы для трубок, наполненных гелием, аналогичны и поэтому не показаны. На рис. 4 и 5 приведены зависимости величины импульсов с фотоумножителя и газоразрядного детектора от подводимой мощности для трубок, наполненных гелием и неоном. Из этих кривых и осциллограмм видно, что эффект гашения наблюдается и в гелии, и в неоне, но в трубках, наполненных гелием, он сильнее. Так, для трубки, наполненной неоном, импульс гашения наблюдается только в послесвечении (рис. 5, кривые *1* и *2*). При наполнении гелием гашение свечения рекомбинации

имеет место как при действии поля СВЧ во время поджигающего импульса, так и после него (рис. 4).

Для выяснения связи между детектированием и добавочным свечением были сняты некоторые зависимости. Так, на рис. 6 показаны распределение свечения и зависимости величин импульсов с газоразрядного детектора и фотоэлектронного умножителя по длине разряда в гелии. Максимум продетектированного импульса совпадает с максимумом возбуждения, причем эти максимумы

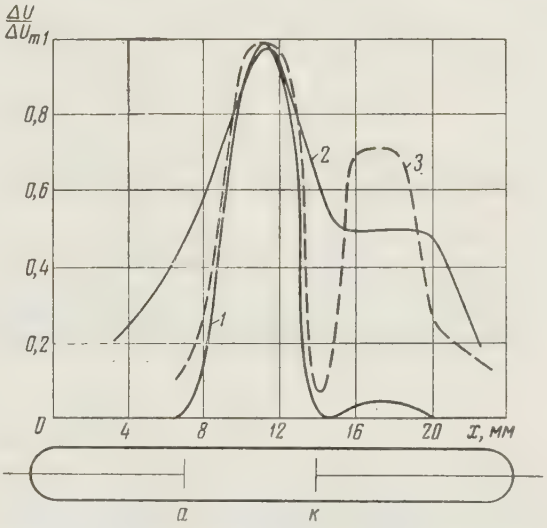



Рис. 6. Зависимость величин импульсов на выходе фотоэлектронного умножителя и газоразрядного детектора по длине разряда, $p = 9$ *мм* рт. ст., Не, $\tau_и = 10$ *мксек*, $\tau_{под} = 75$ *мксек*:
*1* — $\Delta U_ф(x)$; *2* — $\Delta U_д(x)$; *3* —распределение свечения $U_{св}(x)$

приходятся на отрицательное свечение. Так как разряд распространялся за электроды, то импульсы наблюдались и за пределами разрядного промежутка. Аналогичные кривые были сняты для трубок с неоновым наполнением; по своему характеру они аналогичны зависимостям, представленным на рис. 6.

На рис. 7 показано распределение гашения и возбуждения свечения по длине разряда в трубке, наполненной гелием. Максимум эффекта гашения и максимум эффекта увеличения свечения несколько не совпадают.

Зависимость переменного напряжения на газоразрядном детекторе и фотоэлектронном умножителе от разрядного тока представлена на рис. 8. Величина напряжения на детекторе имеет явный максимум при изменении разрядного тока.

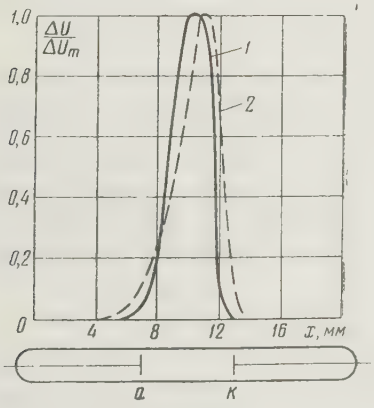



Рис. 7

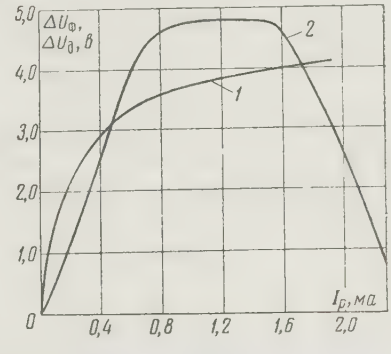



Рис. 8

Рис. 7. Распределение гашения (*1*) и возбуждения свечения (*2*) по длине разряда, $p = 9$ *мм* рт. ст., Не, $\tau_и = 20$ *мксек*, $P / P_m = 0{,}05$

Рис. 8. Зависимость величин импульсов на выходе фотоэлектронного умножителя (*1*) и газоразрядного детектора (*2*) от разрядного тока, $p = 9$ *мм* рт. ст., Не, $\tau_и = 10$ *мксек*, $\tau_{под} = 75$ *мксек*, $P / P_m = 1$

## 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные экспериментальные зависимости показывают сходство явлений детектирования с изменением свечения. Качественно пояснить полученные результаты можно, если считать, что мощность колебаний СВЧ меняет энергию электронов.

Если полагать, как и в работе [1], что ток зависит от энергии электронов:

$$I_0 = AQ^n,$$

где $I_0$ — величина разрядного тока; $Q$ — энергия электронов, то приращение энергии электронов на $\Delta Q$ вызовет приращение тока на

$$\Delta I = nI_0 \frac{\Delta Q}{Q}. \tag{1}$$

С другой стороны, электроны, обладая энергией $Q$, имеют согласно [4] полное число столкновений, приводящих к возбуждению

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{воз}} = B\left(\frac{Q}{Q_{\text{воз}}}\right)^{\frac{5}{2}} e^{-\left(\frac{Q_{\text{воз}}}{Q}\right)^2}.$$

При изменении энергии на $\Delta Q$ увеличение числа возбуждающих столкновений будет равно

$$\delta\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{воз}} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{воз}}\left[\frac{5}{2} + 2\left(\frac{Q_{\text{воз}}}{Q}\right)^2\right]\frac{\Delta Q}{Q}. \tag{2}$$

Если считать, что интенсивность свечения Ф пропорциональна числу возбуждающих столкновений, то изменение числа столкновений приведет к изменению свечения на $\Delta\Phi$, равному согласно формуле (2)

$$\Delta\Phi_{\text{воз}} = \Phi_0\left[\frac{5}{2} + 2\left(\frac{Q_{\text{воз}}}{Q}\right)^2\right]\frac{\Delta Q}{Q}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что увеличение энергии приводит к увеличению свечения возбуждения атомов, причем в первом приближении приращение свечения пропорционально полному свечению возбуждения. Этот факт наблюдался в действительности (рис. 6).

Уменьшение свечения при наложении малых мощностей легче всего пояснить, если учесть, что коэффициент рекомбинации уменьшается с увеличением энергии электрона как $Q^{-\frac{1}{2}}$ [4]. Так как коэффициент рекомбинации показывает, какое количество электронов рекомбинируется в секунду, то, следовательно, он характеризует в какой-то мере и свечение за счет рекомбинации. Отсюда следует, что увеличение энергии на $\Delta Q$ приведет к уменьшению свечения на

$$\Delta\Phi_{\text{рек}} = -\frac{1}{2}\Phi_{\text{рек}}\frac{\Delta Q}{Q}. \tag{4}$$

В силу того, что области интенсивности рекомбинации и возбуждения не совпадают, функции $\Delta\Phi_{\text{рек}}$ и $\Delta\Phi_{\text{воз}}$ имеют максимумы в различных местах газового разряда (рис. 7).

Как следует из формул (1), (3), (4), величины эффектов при детектировании, а также при избыточном свечении одинаковым образом зависят от приращения энергии электронов, а следовательно, в какой-то мере должны иметь сходный характер.

## ВЫВОДЫ

Полученные графики и осциллограммы показывают, что детектирование в газовом разряде сопровождается изменением свечения. Характер зависимостей изменения свечения от различных параметров (мощности, разрядного тока и места облучения) качественно совпадает с аналогичными зависимостями для детектирования. Наличие такой связи некоторым образом поясняет физику работы газоразрядного детектора. Действительно, хотя детектирование не всегда сопровождается изменением свечения рекомбинации, коэффициент рекомбинации, как показано в работе, меняется. Так как изменение этого коэффициента может привести к изменению числа свободных электронов, то в такой же степени может и измениться разрядный ток.

Изменение числа возбужденных атомов при наложении поля СВЧ может также явиться источником изменения разрядного тока (за счет вторичных процессов). С другой стороны, аналогично изменению числа столкновений, приводящих к возбуждению, меняется и число столкновений, сопровождающихся ионизацией. Это явление также вызовет изменение разрядного тока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Лобов, Газоразрядный детектор колебаний СВЧ, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 1, 117.
2. L. Goldstein, J. Anderson, Quenching of afterglow in gaseous discharge plasmas by low power microwaves, Phys. Rev., 1953, **90**, 486.
3. J. M. Anderson, Quenching of the negative glow by microwaves in cold-cathode gaseous discharges, Phys. Rev., 1957, **108**, 898.
4. А. Энгель, Ионизированные газы, Физматгиз, 1959.

Московский энергетический институт
Кафедра теоретических основ радиотехники

Поступила в редакцию
6 V 1960

1961 № 2

# ЭМИССИЯ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ $p-n$-ПЕРЕХОДОВ В КРИСТАЛЛАХ SiC

*М. И. Елинсон, Г. В. Степанов, В. И. Покалякин*

Исследована эмиссия горячих электронов из $p-n$-переходов в кристаллах SiC в зависимости от величины запирающего напряжения на переходе $U_{\text{п}}$ и температуры $T$. Подтверждено наличие высокой плотности тока и неоднородного распределения эмиссии по поверхности. Величина эмиссионного тока $i_{\text{э}}$ определяется током через переход $i_{\text{скв}}$. Отношение $\gamma = i_{\text{э}}/i_{\text{скв}}$ имеет максимум при определенном напряжении $U_{\text{п}}$.

## ВВЕДЕНИЕ

Кристаллы SiC — подходящие объекты для исследования эмиссии горячих электронов, поскольку $\varepsilon_i > \chi$ [1] ($\varepsilon_i$ — пороговая энергия ударной ионизации, $\chi$ — электронное сродство. Для гексагонального SiC $\varepsilon_i \simeq 4{,}3$ *эв*, $\chi = 4$ *эв*). Кроме того, кристаллы SiC достаточно химически инертны, что позволяет надеяться на стабильность их поверхностных свойств.

В [2] впервые исследована эмиссия электронов из естественных $p-n$-переходов в SiC. Найден ряд интересных особенностей эмиссии, в частности, высокая плотность тока $j_{\text{э}} > 1$ *а/см*$^2$ и закон $i_{\text{э}} \sim i_{\text{скв}}^{k}$, где $i_{\text{э}}$ — эмиссионный ток; $i_{\text{скв}}$ — обратный ток через переход. Существует несколько взглядов на природу $i_{\text{скв}}$ [3, 4, 5], важных для понимания механизма эмиссии. В основе работ [4, 5] лежат представления о неполностью ионизированных донорных центрах в SiC и их ионизации, что кажется более правдоподобным по сравнению с развитыми в [3] искусственным соображениями о структуре $p-n$-переходов. К сожалению, в [2] не исследованы важнейшие зависимости $i_{\text{э}}$ от электрического поля в переходе и от температуры. Неясна также природа эмиссионных центров.

## 1. ОБЪЕКТЫ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Так же как и в [2] нами исследовались естественные $p-n$-переходы, образующиеся при выращивании кристаллов SiC методом сублимации. Наличие переходов устанавливалось по известному методу электролюминесценции и вольтамперным характеристикам. Кристаллы вырезались из друз, шлифовались и отбирались по числу и яркости светящихся точек при включении запирающего напряжения. Поверхностная обработка состояла в снятии диэлектрических плепок $SiO_2$ и обезжиривании.

Экспериментальный прибор и измерительная схема представлены на рис. 1. Кристалл $K$ прижимался к толстому молибденовому вводу $Cm$ пружинящими вольфрамовыми остриями $O$. Температура кристалла измерялась термопарой $T$. Прибор, кроме того, содержал отсасывающую сетку $C$, соединенную с виллемитовым экраном $\Phi$ на полупрозрачной платиновой основе, наличие которого позволяло сопоставлять положение пятен на экране с положением светящихся точек на кристалле.

На кристалл можно было подавать как статическое, так и импульсное напряжение. Последнее позволяло поддерживать неизменной температуру кристалла даже при высоких обратных напряжениях $U_п$.

Анодное напряжение регулировалось в широких пределах, а эмиссионный ток измерялся электрометром с чувствительностью $\sim 10^{-13}$ *а*.

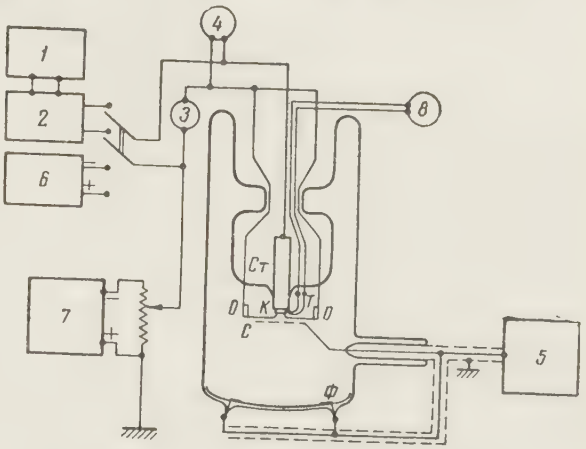



Рис. 1. Экспериментальный прибор и схема исследования:

*К* — кристалл SiC; *О* — вольфрамовые пружинящие острия; *Ст*—толстый молибденовый стержень для увеличения теплоотвода от кристалла; *С* — отсасывающая анодная сетка; *Ф*— флуоресцирующий экран на металлической полупрозрачной основе; *1* — импульсный генератор 26И; *2* — усилитель импульсов; *3*— прибор, измеряющий стационарный или средний ток; *4*— прибор, измеряющий постоянное или импульсное напряжение; *5*— ламповый электрометр; *6* — источник постоянного тока; *7* — источник анодного напряжения; *8*— измеритель температуры

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На ряде кристаллов были получены эмиссионные токи в пределах $10^{-12}$—$10^{-6}$ *а*. Как правило, происходило формирование эмиссии во времени, которое мы производили при непрерывном отборе тока и повышенной температуре кристалла ($\sim 400°$ С). Примерно после 8 *час* тренировки эмиссия приобретала стационарное значение и становилась весьма устойчивой. Формирование эмиссии связано, вероятно, с очисткой поверхности кристалла.

Необходимое для эмиссии напряжение на переходе $U_п$ колебалось для различных образцов в широких пределах. Сопоставление эмиссионной картины на люминесцирующем экране с картиной светящихся точек на кристалле показывает, что светящиеся точки являются эмиссионными центрами. Большое количество и высокая интенсивность люминесцирующих точек не обязательно связаны с большим эмиссионным током. Решающее значение имеет глубина расположения перехода под эмиттирующей поверхностью. Число эмиттирующих центров растет с увеличением $U_п$. Линейные размеры эмиттирующих центров лежат в пределах 1—10 *мк*. Плотность тока, рассчитанная по суммарной площади эмиттирующих центров, составляет 1—10 *а/см*$^2$. Следовательно, подтверждается важнейший результат работы [2] о высокой плотности эмиссионного тока.

На рис. 2 представлены зависимости $i_{скв} = f(U_п)$ и $i_э = f(U_п)$ для одного из эмиттеров. Грубая структура характеристик сквозного тока (кривые *1* и *2*) состоит в наличии участка быстрого роста $i_{скв}(AB)$ и участка более медленного изменения $i_{скв}(BC)$ (см. также рис. 3). Замедление роста $i_{скв}$ несколько необычно для запирающего напряжения.

Кривая *1* соответствует статическому режиму, когда температура кристалла сильно изменялась с ростом $U_п$ (изменение температуры представлено на кривой *3*). Кривая *2* соответствует импульсному режиму ($\tau_и = 10$ *мксек*), когда во всем интервале $U_п$ поддерживалась комнатная температура кристалла.

Соответствующие характеристики эмиссионных токов $i_э$ представлены на кривых *1′* и *2′*.

Области *AB* соответствует быстрый рост $i_э$. В области *BC* рост $i_э$ сильно замедляется (сильнее, чем $i_{скв}$). Для статического режима,

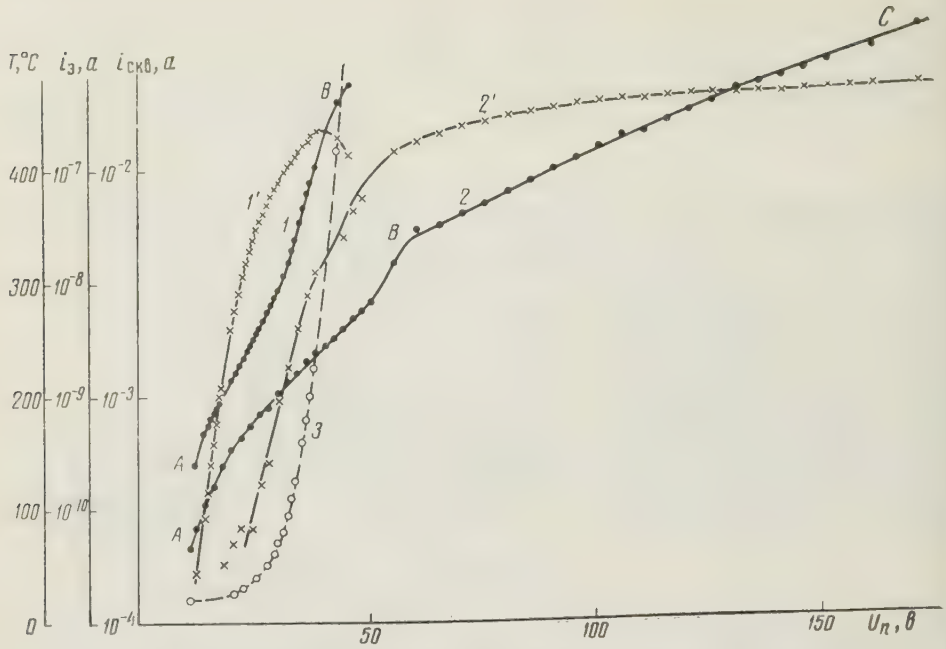



Рис. 2. Сравнение статических и импульсных характеристик перехода:

1 — $i_{скв}(U_п)$ для статического режима; 1′ — $i_э(U_п)$ для статического режима; 2 — $i_{скв}(U_п)$ для импульсного режима, $T = 20°C$; 2′ — $i_э(U_п)$ для импульсного режима, $T = 20°C$; 3 — температура слоя при работе в статическом режиме

вследствие непрерывного повышения температуры, наблюдается меньшее замедление роста $i_э$. Лишь при $T > 400°C$ имеет место некоторое падение $i_э$, возможно связанное с увеличенным рассеянием электронов на колебаниях решетки.

На рис. 3 представлены импульсные характеристики $i_{скв}(U_п)$ и $i_э(U_п)$, снятые для двух температур кристалла $T = 20°C$ и $T = 75°C$.

На основании рис. 2 и 3 можно заключить, что влияние температуры на эмиссию горячих электронов в рассматриваемых условиях более слабое и имеет другой характер по сравнению с рассмотренным в теории [1], пригодной для кристаллов типа Ge и Si, особенно в области $BC$.

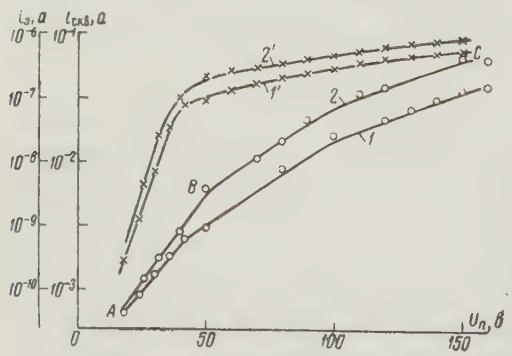



Рис. 3. Импульсные характеристики $i_{скв}(U_п)$ и $i_э(U_п)$ при различных температурах:

1 — $i_{скв}(U_п)$ при 20°C; 1′ — $i_э(U_п)$ при 20°C; 2 — $i_{скв}(U_п)$ при 75°C; 2′ — $i_э(U_п)$ при 75°C

Следовательно, в изучаемой системе увеличение рассеяния электронов с ростом температуры $T$ компенсируется либо ростом числа электронов, либо, возможно, изменением электрического поля в переходе при изменении $T$.

Ход характеристик показывает далее, что напряжение, при котором достигается практическое «насыщение» эмиссионного тока, еще весьма далеко от пробивного.

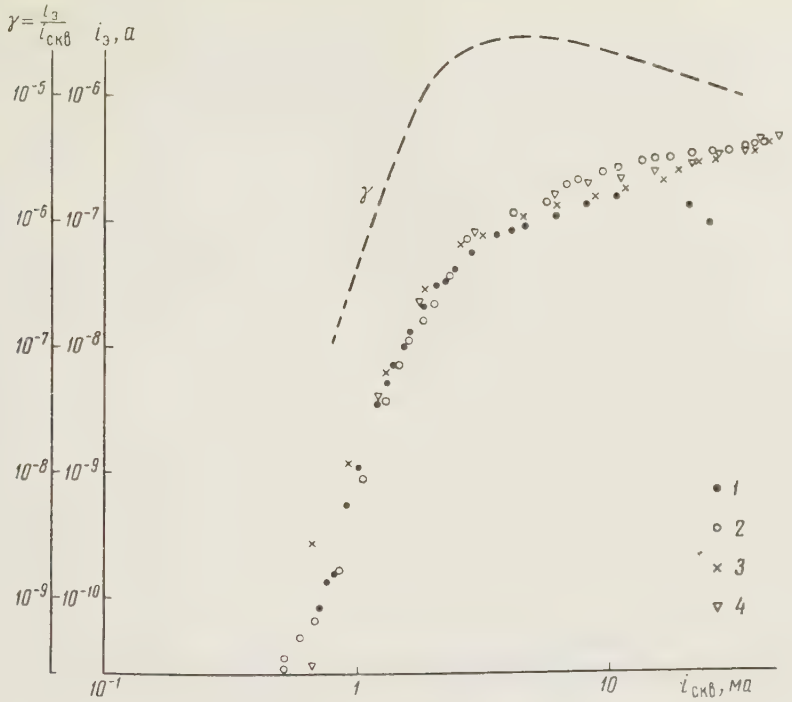



Рис. 4. Характеристики $i_э$ ($i_{скв}$); $\gamma(i_{скв})$:

*1* — статические; *2, 3* — импульсные при 20°С; *4* — импульсные при 75°С

Особенно интересен следующий установленный факт. Если $i_э$ построить в зависимости от $i_{скв}$ (см. рис. 4), то все экспериментальные характеристики, независимо от напряжений на переходе $U_п$ и температуры $T$, в пределах экспериментальных ошибок, совпадают друг с другом, т. е. данной величине $i_{скв}$ всегда соответствует вполне определенное значение $i_э$.

Это можно истолковать так, что электрическое поле в переходе $E$ очень велико и слабо зависит от $U_п$ (например, $E \sim \sqrt{U_п}$). Поэтому ускорение электронов в переходе всегда достаточно и практически не зависит от $U_п$ и $T$. Эмиссионный же ток тем больше, чем больше носителей в переходе.

На рис. 4 изображено также отношение $\gamma = i_э/i_{скв}$, общее для всех характеристик. Это отношение имеет максимум в районе излома характеристик $i_{скв}$ ($U_п$) (район точки $B$).

Следовательно, $\gamma$ зависит от хода $i_{скв}$ и не может быть объяснено внешними причинами, например переходом эмиссии в режим пространственного заряда.

По-видимому, в области $BC$ включается в игру новый сильный механизм рассеяния, и число электронов, способных эмиттироваться, увеличивается значительно медленнее, чем общее число носителей тока.

Связь $i_{скв}$ и $i_э$ хорошо проявляется и на характеристиках, снятых при температуре жидкого азота (см. рис. 5; кривые относятся к другому кристаллу). Установлено, что резкое увеличение токов, приводящее к падающему характеру зависимостей, связано с нагревом кристалла.

Жесткая зависимость $i_э$ ($i_{скв}$) свидетельствует о том, что сквозной ток проходит в значительной части по тем местам перехода, которые являются эмиссионными центрами. Она же свидетельствует о постоянстве свойств эмиттирующей поверхности.

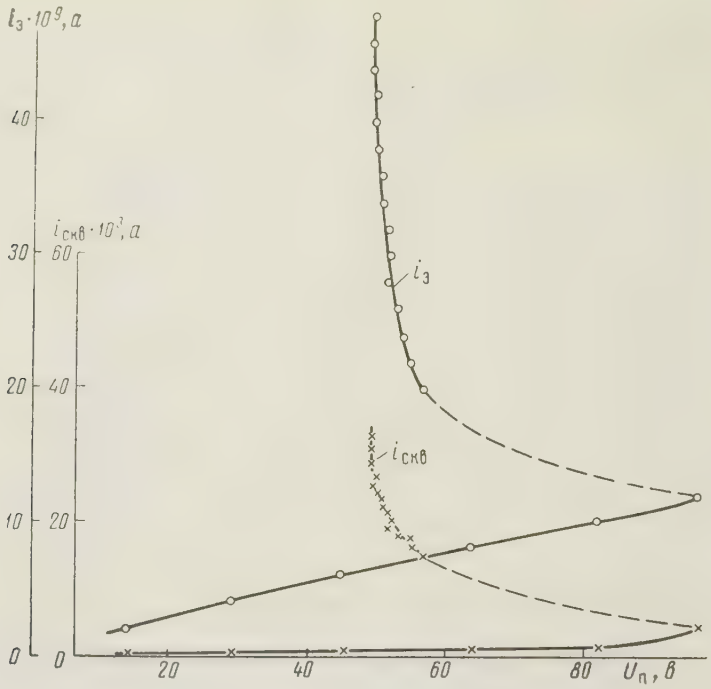



Рис. 5. Статические характеристики $i_{скв}$ ($U_п$) и $i_э$ ($U_п$) при —180°С

Максимальное значение $\gamma \simeq 10^{-4}$, т. е. очень мало. По-видимому, это связано с потерями энергии электронов в приповерхностном сильно легированном $n$-слое, в котором электрическое поле незначительно.

Повышение эффективности эмиссии этого типа является одной из главных задач дальнейшего исследования.

## ВЫВОДЫ

При исследовании эмиссии горячих электронов из $p$ — $n$-переходов в SiC установлено следующее.

1. Плотность эмиссионного тока, в согласии с [2], достаточно велика, $j_э = 1$—$10$ $а/см^2$.

2. Эмиссия неоднородно распределена по поверхности. Люминесцирующие точки на поверхности кристалла являются эмиссионными центрами.

3. Температурная зависимость эмиссии более слабая и имеет иной характер по сравнению с теоретической зависимостью для однородных полупроводников типа Ge и Si, что связано с наличием факторов, компенсирующих рост рассеяния электронов на колебаниях решетки при увеличении температуры.

4. Отношение эмиссионного тока к сквозному току через переход ($\gamma$) очень мало ($\sim 10^{-4}$), что возможно связано с рассеянием электронов вблизи эмиттирующей поверхности и имеет максимум при определенном напряжении $U_п$.

Уменьшение $\gamma$ после максимума связано с новым сильным механизмом рассеяния.

5. Эмиссионный ток жестко связан со сквозным током через переход независимо от того, при каких температуре $T$ и напряжении $U_п$ полу-

чается данное значение сквозного тока. Этот факт объясняется наличием сильного электрического поля в переходе, всегда обеспечивающего достаточное ускорение электронов.

Авторы выражают благодарность В. Б. Сандомирскому за полезную дискуссию, а также Н. В. Сумину и А. М. Фадеевой за помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ш.М. Коган, В.Б. Сандомирский, Физика твердого тела,1960,2.10,2570.
2. L. Patrick, W. J. Choyke, Phys. Rev. Let., 1959, **2**, 2, 48.
3. L. Patrick, J. Appl. Phys., 1957, **28**, 765.
4. R. Goffaux, J. phys. et radium, 1960, **21**, 2, 94.
5. Е. Т. Харламова, Г. Ф. Холуянов, Физика твердого тела, 1960, **2**, 3, 426.

Поступила в редакцию
7 IX 1960

1961 № 2

# АВТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ С МОНОКРИСТАЛЛОВ ВОЛЬФРАМА, ПРЕДШЕСТВУЮЩАЯ РАЗВИТИЮ ВАКУУМНОЙ ДУГИ

*Г. Н. Фурсей*

Изложены результаты исследования автоэлектронной эмиссии в «преддуговой» период, описаны конструкция установки и методика проведения опытов.

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при плотности тока выше некоторого критического значения стационарная во времени автоэлектронная эмиссия переходит в «вакуумную дугу» — лавинообразный процесс, заканчивающийся оплавлением эмиттера [1]. Этот процесс приводит к гибели автокатода, и поэтому интересно изучить явления, приводящие к «вакуумному пробою» и его сопровождающие. Этому вопросу в последние годы были посвящены работы группы Дайка [1, 2, 3, 4, 5], Елинсона [6, 7, 8], а также Шуппе и Гофмана [9].

Для исследований эти авторы применяли импульсную методику, позволяющую отбирать от эмиттера значительно бóльшие плотности токов, чем в стационарном режиме, и наблюдать ряд явлений, изучение которых в стационарном режиме затруднительно.

Оказалось, что дуге предшествует ряд аномальных, по сравнению с обычным протеканием процесса, явлений, а именно: 1) самопроизвольный рост тока в течение действия импульса напряжения прямоугольной формы; 2) отклонение от формы вольтамперной характеристики, предсказываемой теорией Фаулера — Нордгейма и хорошо подтверждающейся при меньших плотностях тока; 3) появление яркого кольца, окружающего обычное эмиссионное изображение.

Целью нашего исследования была проверка наличия указанных явлений, а также результатов, опубликованных в работах [1—8] и в работе [9], между которыми имеется расхождение.

Суть этого расхождения заключается в том, что в работах [1—8] вольтамперная характеристика отклоняется от прямолинейной в сторону меньших токов, а в работе [9] — в область бóльших токов.

Полагая, что применяемая нами методика обладает несколько большей разрешающей способностью и чувствительностью, мы надеялись получить некоторые дополнительные сведения о развитии процесса.

## 1. УСЛОВИЯ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЙ

Для проведения исследований была собрана установка (рис. 1), состоявшая из следующих основных узлов.

1. Генератор высоковольтных импульсов прямоугольной формы длительностью 0,5—2 *мксек* при частоте повторения 50—1000 *имп/сек*. Генератор мог также подавать одиночные импульсы длительностью 0,5—10 *мксек* с плавной регулировкой амплитуды в пределах 0—20 *кв* и временем возрастания переднего фронта менее 0,1 *мксек*. В состав этого ге-

нератора входили импульсный генератор типа 26И, служивший блоком формирования, и модулятор (*М*) на двух лампах (ГИ-30 и ГМИ-83), работавших в режиме ключа с частичным разрядом емкости. Применение генератора 26И значительно упростило изготовление установки, так как понадобилось лишь собрать очень простой модулятор (рис. 2).

2. Двухлучевой осциллограф ОК17М с фотоприставкой.

3. Катодный повторитель (*КП*) с ослабителем на входе, позволявший скачками изменять амплитуду входного сигнала до 1000 раз.

4. Цепь прогрева острия (*ПО*).

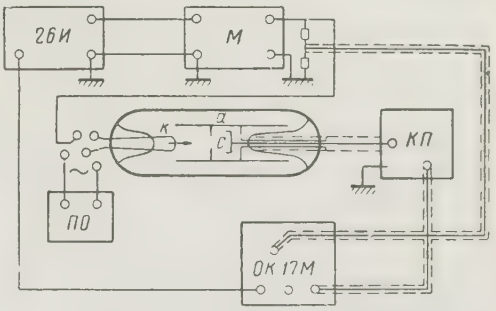



Рис. 1. Блок-схема установки

Высоковольтный импульс отрицательной полярности с амплитудой в несколько киловольт и длительностью 2 *мксек* подавался на катод *К* экспериментального вакуумного прибора (рис. 1). Возникавший при этом импульс автоэлектронного тока улавливался коллектором *С* и через катодный повторитель поступал на первый усилитель осциллографа ОК17М. Катодный повторитель был подключен непосредственно к коллектору экспериментального прибора, чтобы уменьшить паразитную емкость и тем самым уменьшить постоянную времени входной цепи, а также чтобы

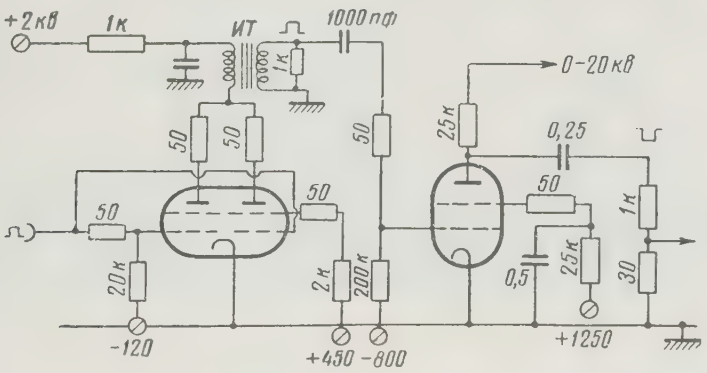



Рис. 2. Принципиальная схема модулятора

согласовать полное сопротивление нагрузки с входом усилителя осциллографа ОК17М (100 *ом*). На вторую пару пластин электронно-лучевой трубки осциллографа поступал импульс напряжения, снятый с омического делителя.

Таким образом, на экране осциллографа можно было одновременно наблюдать импульс напряжения и соответствующий ему импульс тока на коллектор.

Запуск установки производился подсвечивающим импульсом с осциллографа ОК17М. Синхронизация работы установки и цепи развертки осциллографа обеспечивалась соответствующим подбором времени задержки на генераторе 26И и осциллографе.

Затвор фотоаппарата предварительно открывался и на один кадр производилась съемка трех-четырех точек.

Усилитель и пластины трубки осциллографа были предварительно откалиброваны при помощи ГСС-6, а также при помощи генератора импульсов прямоугольной формы и импульсного вольтметра. Обе калибро-

вочных кривых совпали в пределах погрешности приборов, использованных для калибровки.

Измерение величин полученных амплитуд тока и напряжения производилось непосредственно на фотопленке при помощи компаратора.

«Разрешение по напряжению» ограничивалось шириной линии развертки на пленке и равнялось 0,05 *мм*, что соответствовало напряжению приблизительно 50 *в*. «Разрешение по току» также ограничивалось шириной линии, но поскольку при незначительном изменении напряжения ток менялся весьма сильно, практически линии тока всегда «разрешались».

Погрешности измерений тока и напряжения в основном определялись классом приборов, примененных для калибровки осциллографа, и могли быть оценены величиной 5—7%.

В качестве объекта исследований был взят вольфрам, как материал, эмиссионные и вакуумные свойства которого наиболее тщательно изучены.

Катод в виде острия изготовлялся обычным методом автоматического электролитического травления, что позволяло приготовлять острия с весьма близкими значениями радиусов. Изготовленный эмиттер помещался в прибор, который затем подвергался откачке. В отпаянном приборе вакуум улучшался распылением титанового и молибденового поглотителей и откачкой манометром Альперта. Измерения производились при давлении в приборе порядка $10^{-9}$ *мм* рт. ст. Перед снятием каждой точки производился прогрев острия для очистки его поверхности. Чистота поверхности контролировалась по эмиссионным картинам, которые наблюдались на анодной диафрагме.

## 2. КОНСТРУКЦИЯ ПРИБОРА

Основным отличием описанной выше методики было применение внутренней экранировки в вакуумном приборе.

Существенную трудность при измерениях создает наличие очень сильной наводки с электрода, на который подается высоковольтный импульс. Предотвратить это влияние можно уменьшением сопротивления нагрузки, что дает возможность получить такую постоянную времени, при которой импульс наводки дифференцируется и составляет во времени лишь незначительную часть полезного сигнала (уменьшение $R$), или же путем внутренней экранировки (уменьшение $C$).

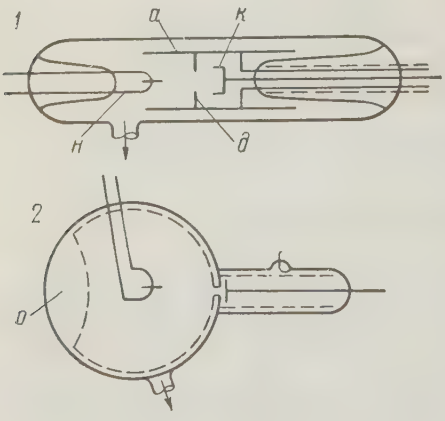



Рис. 3. Конструкции экспериментального прибора:

*к* — коллектор; *а* — анодный цилиндр; *д* — диафрагма; *н* — катод; *о* — окно для наблюдения эмиссионных картин

Второй путь представлялся нам более простым, так как, снимая сигнал со сравнительно большого сопротивления (10 ком), можно было измерять довольно слабые токи ($10^{-5}$ *а*), используя широкополосный усилитель осциллографа ОК17М без какой-либо переделки. Кроме того, можно было, не меняя коэффициента усиления, а тем самым не прибегая к дополнительной калибровке, скачками менять входное сопротивление, что позволяло ослаблять сигнал до 1000 раз и одновременно улучшать условия прохождения импульса тока.

В описываемой работе мы применяли вакуумные приборы преимущественно двух типов (рис. 3). Их основным элементом являлся экранирую-

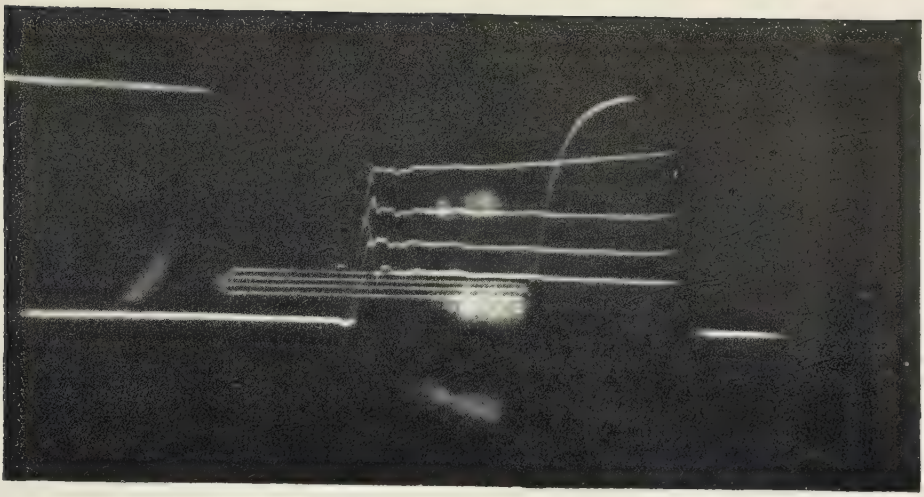


Рис. 6. Появление самопроизвольного возрастания тока

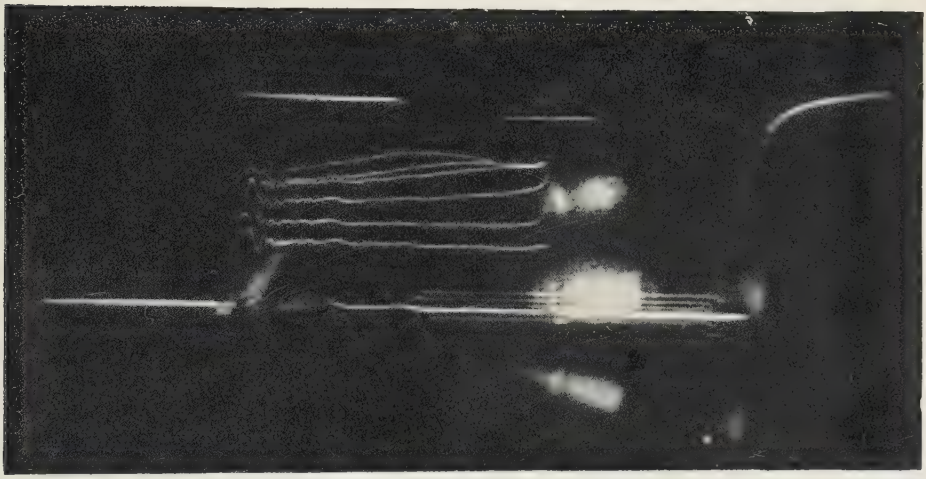


Рис. 7. Момент самопроизвольного возрастания тока, спада тока и возникновения дуги

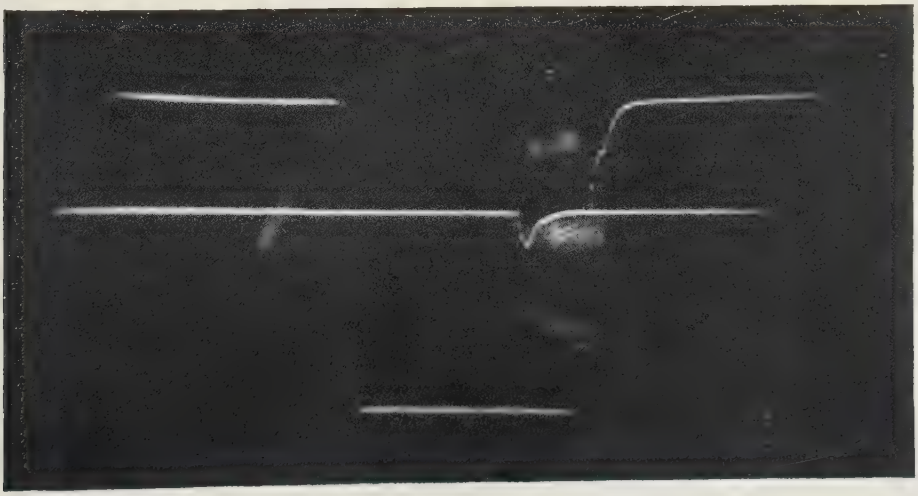


Рис. 8. Осциллограмма импульса напряжения и импульса тока в момент пробоя

щий цилиндр. В конструкции *1* (рис. 3) острие расположено внутри цилиндра вблизи отверстия анодной диафрагмы так, чтобы эмиттированные электроны не могли попасть на свободное стекло, что привело бы к зарядке его и искажению поля. Коллекторная часть гибким экраном

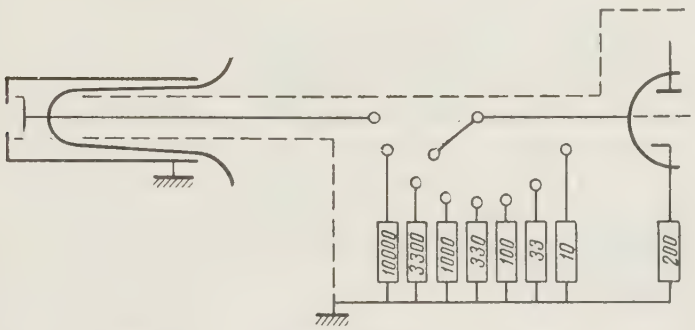



Рис. 4. Коллекторная часть прибора и вход катодного повторителя

соединялась со входом катодного повторителя. Конструкция *2* отличалась от *1* тем, что экранирующую роль выполнял слой металла, напыленный на стекло.

Экранирующий цилиндр (рис. 4) служил для защиты коллектора от наводки внутри прибора. Такая конструкция позволила уменьшить наводку приблизительно в 1000 раз при ослаблении полезного сигнала всего в 5—15 раз. Таким образом, влияние наводки удалось почти полностью устранить, и она вызывала лишь незначительные искажения фронтов полезного импульса. Острие было расположено на расстоянии 5—10 *мм* от отверстия, чтобы по возможности проектировать на коллектор бóльшую часть эмиссионного изображения.

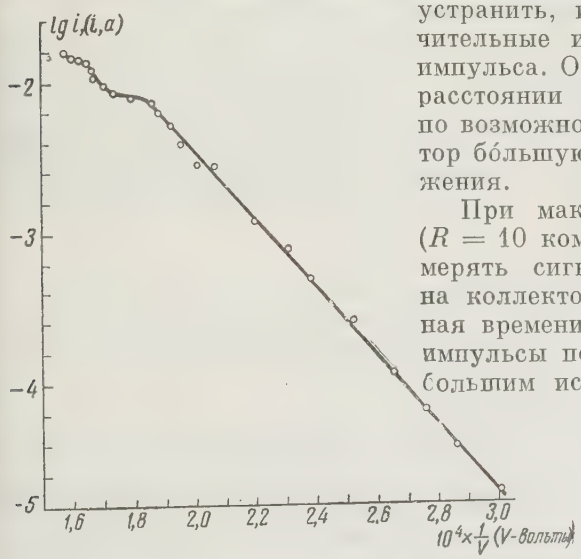



Рис. 5. Вольтамперная характеристика автоэлектронного тока в импульсном режиме

При максимальной чувствительности ($R = 10$ ком) можно было уверенно измерять сигналы, соответствующие току на коллектор порядка $10^{-6}$ *а*. Постоянная времени цепи позволяла пропускать импульсы полезного сигнала с очень небольшим искажением. При других положениях входного ослабителя, соответствующих сопротивлениям 3,3, 1 *ком*, 333, 100, 33, 10 *ом*, подобные искажения отсутствовали.

Ослабление, вносимое экранирующим цилиндром, определялось экспериментально для каждого случая. Для этого на катод подавались импульсы напряжения длительностью 2 *мксек* при частоте повторения 250 *имп/сек* и гальванометром измерялись средний полный анодный ток и ток на коллектор. Подобным способом снималось до 10 точек и затем определялось среднее значение коэффициента ослабления.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Контрольные измерения были проведены на 15 эмиттерах в вакуумных приборах различного типа. Проведенные измерения позволили установить следующее.

1. При больших плотностях тока во всех 15 случаях вольтамперная характеристика отклоняется в область меньшего значения тока (рис. 5).

2. В «нелинейной» части характеристики имеют место периодические колебания тока (рис. 5). Подобного рода волнообразные пульсации термоэлектронной эмиссии наблюдались при наличии сильных полей [10]. В работе [11] эти отклонения объясняются квантово-механическими эффектами интерференции электронных волн, отраженных от потенциального барьера. Мы склонны предположить, что аналогичного рода явления имели место и в нашем случае. Ограничиваясь пока высказанным предположением, мы надеемся провести тщательный анализ этого явления в следующей работе.

3. Наблюдался эффект самопроизвольного возрастания тока во времени (рис. 6), который обнаруживался при плотности тока, достигавшей приблизительно 30—40% от критической, что совпало с результатами работ [1—5].

4. При расчете радиусов эмиттеров по приближенной формуле [12] были подсчитаны критические плотности токов, которые составили от $3 \cdot 10^7$ до $6 \cdot 10^7$ *а/см*$^2$, что также хорошо согласуется с данными, полученными другими авторами.

5. Непосредственно перед самым возникновением дуги было замечено самопроизвольное уменьшение тока при постоянном напряжении. что предположительно можно приписать влиянию объемного заряда (рис. 7).

6. Как видно из осциллограммы момента возникновения дуги (рис. 8), «дуговой процесс» весьма кратковременен и длится менее $10^{-7}$ *сек*.

Автор приносит сердечную благодарность И. Л. Сокольской за рекомендацию темы, внимание к работе и просмотр рукописи. Автор признателен Ю. В. Зубенко и Г. П. Щербакову за ряд практических советов, связанных с техникой получения высокого вакуума. Считаю своим приятным долгом выразить также искреннюю благодарность А. Э. Исаеву, Ю. В. Маркову и дипломанту А. А. Рогачеву за полезные беседы по вопросам методики.

### ЛИТЕРАТУРА

1. W. P. Dyke, L. K. Trolan, Phys. Rev., 1953, 89, 4, 799.
2. W. P. Dyke, J. K. Trolan, E. E. Martin, J. P. Barbour, Phys. Rev., 1953, 91, 5, 1043.
3. W. P. Dyke, J. K. Trolan, E. E. Martin, Phys. Rev., 1953, 91, 5, 1054.
4. J. P. Barbour, W. W. Dolan, J. K. Trolan, E. E. Martin, W. P. Dyke, Phys. Rev., 1953, 92, 1, 45.
5. W. P. Dyke, J. P. Barbour, E. E. Martin, J. K. Trolan, Phys. Rev., 1955, 99, 4, 1192.
6. М. И. Елинсон, Г. Ф. Васильев, Автоэлектронная эмиссия, Физматгиз, 1958.
7. М. И. Елинсон, Г. Ф. Васильев, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 7, 945.
8. М. И. Елинсон, В. А. Горьков, А. А. Яснопольская, Г. А. Кудинцева, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 8, 1318.
9. И. И. Гофман, О. Д. Протопопов, Г. Н. Шуппе, Изв. АН УзССР, 1959, 6, 73; И. И. Гофман, Г. Н. Шуппе, О. Д. Протопопов, Физика твердого тела, 1960, 2, 6, 1323.
10. R. Z. E. Siefert, T. E. Phipps, Phys. Rev., 1939, 56, 7, 663.
11. E. Guth, C. J. Mullin, Phys. Rev., 1941, 59, 7, 575.
12. M. Drechsler, E. Henkel, Z. angew. Phys., 1054, 6, 8, 341.

Поступила в редакцию
1 VII 1960

# К ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОГО ДИОДА БЕЗ НАКАЛЕННОГО КАТОДА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ

*Г. Я. Мякишев*

Получены выражения, определяющие статическую характеристику плоского диода без накаленного катода для различных режимов. В отличие от известных работ, учтено распределение электронов по скоростям. Проанализированы условия перехода от одних режимов работы к другим.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время статическая характеристика плоского диода без накаленного катода детально исследована при условии, что распределением электронов по скоростям можно пренебречь [1]. Такое приближение, вообще говоря, допустимо, так как средняя скорость теплового движения обычно много меньше тех скоростей, которые приобретают электроны в ускоряющем поле.

Однако при возникновении виртуального катода учет распределения электронов по скоростям, особенно в области вблизи виртуального катода, может в ряде случаев иметь существенное значение, в частности, при изучении шумов в диоде и при исследовании влияния возмущения высокой частоты на поток электронов в тормозящем электрическом поле [2]. Виртуальный катод осуществляет сортировку электронов по скоростям.

Интересно поэтому исследовать влияние теплового распределения электронов по скоростям на статическую характеристику диода без накаленного катода, подобно тому, как это сделал Ленгмюр для диода с накаленным катодом. Интересно также выяснить границы существования различного рода режимов работы диода.

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая, когда ускоренный сеткой поток электронов попадает в тормозящее электрическое поле между сеткой и отражателем (отражательный клистрон). Полученные выражения можно распространить и на случай ускоряющего поля.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть сетка расположена в начале координат, а отражатель — на расстоянии $d$ от нее. Распределение электронов по скоростям в плоскости сетки, через которую они поступают в рассматриваемый диод, будем учитывать при помощи функции распределения, соответствующей решению задачи о плоском диоде с накаленным катодом* (для значений скоростей $v \geqslant 0$). Рассеяние электронов структурной сетки не учитываем. Будем считать также, что отражатель полностью поглощает попадающие на него электроны (вторичная эмиссия отсутствует).

При этих условиях функция распределения имеет вид

$$\begin{aligned} f(0, v) &= \Theta(v) N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT} + \frac{e\varphi_1}{kT}} && \text{для } v > 0, \\ f(d, v) &= 0 && \text{для } v < 0, \end{aligned} \tag{1}$$

* Такая функция полнее отражает действительность, чем максвелловская с дрейфом, рассмотренная в работе [3].

$\varphi_1$ — потенциал сетки относительно катода; $N_0$ — концентрация электронов; $\Theta(v)$ — обрезающий фактор, учитывающий то обстоятельство, что скорости электронов на сетке не могут быть меньше определенных значений:

$$\Theta(v) = \begin{cases} 1 \text{ при } v \geqslant \sqrt{\frac{2e}{m} V_1}, \\ 0 \text{ при } v < \sqrt{\frac{2e}{m} V_1}; \end{cases} \tag{2}$$

$V_1 = \varphi_1 + \varphi_0$, где $\varphi_0$ — глубина провисания минимума потенциала относительно катода в пространстве катод — сетка. В отсутствие виртуального катода в этом пространстве $V_1 = \varphi_1$.

Граничные условия для потенциала выбираем в форме

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi(d) = \varphi_2, \tag{3}$$

где $\varphi_2$ — потенциал отражателя относительно катода. В рассматриваемом случае $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$.

Для решения задачи воспользуемся системой уравнений, предложенной А. А. Власовым [4], считая, что столкновения между электронами можно не учитывать.

В соответствии с плоской симметрией задачи и ее статическим характером уравнения для функции распределения и потенциала имеют вид

$$v \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{d\varphi(x)}{dx} \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dv. \tag{4}$$

Знак заряда электрона здесь учтен.

Введем далее безразмерные величины:

$$x' = x \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_0}{kT}},$$

$$t' = t \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_0}{m}}, \quad v' = v \sqrt{\frac{m}{kT}},$$

$$\varphi' = \varphi \frac{e}{kT}, \quad f' = f \sqrt{\frac{kT}{m}} \frac{1}{N_0}. \tag{5}$$

Опуская в дальнейшем штрихи (для простоты обозначений), исходную систему уравнений и граничные условия можно переписать в новых безразмерных величинах следующим образом:

$$v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{df}{\partial v} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dv,$$

$$f(0, v) = \Theta(v) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2} + \varphi_1} \text{ для } v > 0, \tag{6}$$

$$\Theta(v) = \begin{cases} 1 \text{ при } v \geqslant \sqrt{2V_1}, \\ 0 \text{ при } v < \sqrt{2V_1}, \end{cases}$$

$$f(l, v) = 0 \qquad \text{для } v < 0,$$

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi(l) = \varphi_2,$$

$l = d \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{kT}}$ — безразмерное расстояние между сеткой и отражателем.

## 2. РЕЖИМ РАБОТЫ ДИОДА, ПРИ КОТОРОМ СУЩЕСТВУЕТ ВИРТУАЛЬНЫЙ КАТОД (III РЕЖИМ)

В этом случае удобно ввести новую систему координат, совместив ее начало с минимумом потенциала. Потенциал также будем отсчитывать от минимума. Обозначая новые координаты через $\xi$ и новый потенциал через $\eta$, можно написать

$$\xi = x - x_m, \quad \eta = \varphi - V_m, \tag{7}$$

где $x_m$ — положение минимума потенциала относительно сетки; $V_m$ — глубина провисания минимума относительно катода. Примерная форма потенциальной кривой изображена на рис. 1.

В новых переменных система (6) примет вид

$$v\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \eta(\xi_{(1)}) = \eta_1, \quad \eta(\xi_{(2)}) = \eta_2,$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dv, \qquad f(\xi_{(1)}, v) = \Theta(v)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}+\varphi_1} \quad \text{для } v > 0, \tag{8}$$

$$f(\xi_{(2)}, v) = 0 \quad \text{для } v < 0.$$

$$\Theta(v) = \begin{cases} 1 \text{ при } v \geqslant \sqrt{2V_1}, \\ 0 \text{ при } v < \sqrt{2V_1}. \end{cases}$$

Здесь $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$ и $\eta_1$, $\eta_2$ — координаты и, соответственно, потенциалы сетки и отражателя в новой системе. Очевидно, что

$$-\xi_{(1)} + \xi_{(2)} = l,$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{9}$$

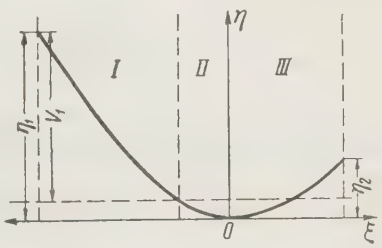



Рис. 1. Качественная картина распределения потенциала в диоде при наличии виртуального катода (III режим)

Выражения (9) вместе с системой уравнений и граничными условиями (8) полностью определяют задачу.

Для решения системы (8) воспользуемся методами, развитыми в работах Л. А. Вайнштейна [5] и Л. Э. Паргаманика [6].

Общее решение кинетического уравнения системы (8) есть произвольная функция величин $\frac{v^2}{2} - \eta(\xi)$:

$$f = f\left\{\frac{v^2}{2} - \eta(\xi)\right\}. \tag{10}$$

Решение (10) должно удовлетворять граничным условиям (8) и, соответственно, $f(\xi, v)$ должна быть отлична от нуля только в определенных интервалах скоростей.

В пространстве диода для исследуемого случая нужно различать три области: $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_1 - V_1$ (первая область); $\eta_1 - V_1 \leqslant \eta \leqslant 0$ (вторая область) и $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ (третья область) (рис. 1).

Для второй и третьей областей решения с точностью до множителя $e^{\varphi_1}$ совпадают с соответствующими выражениями теории диода с накаленным катодом [5]. Они могут быть получены после интегрирования уравнения Пуассона системы (8).

Для второй области

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left\{ \frac{2e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\sqrt{y+\eta} - \sqrt{y}\right) dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\eta}\, dy \right\}^{+\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$\xi_1' = -e^{\frac{\eta_1-\varphi_1}{2}} \int_0^{\eta} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\sqrt{y+\eta} - \sqrt{y}\right) dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\eta}\, dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta. \tag{12}$$

Для третьей области

$$\xi_2 = e^{\frac{\eta_1-\varphi_1}{2}} \int_0^{\eta} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\sqrt{y+\eta} - \sqrt{y}\right) dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta. \tag{13}$$

Для значений $\xi_1'$ и $\xi_2$ в зависимости от $\eta$ составлены таблицы [1].

Рассмотрим решение, относящееся к первой области. В этой области электроны могут иметь скорости, лежащие в следующих интервалах:

$$\begin{aligned} &\infty \geqslant v \geqslant \sqrt{2(V_1 - \eta_1 + \eta)} \quad \text{для} \quad v > 0, \\ &-\sqrt{2\eta} \geqslant v \geqslant -\sqrt{2(V_1 - \eta_1 + \eta)} \quad \text{для} \quad v < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Соответственно, для скоростей, лежащих в интервалах (14), функция распределения, удовлетворяющая граничным условиям (8), имеет вид

$$f(\xi, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2} + \eta - \eta_1 + \varphi_1}. \tag{15}$$

Для всех же остальных значений скоростей $f(\xi, v) = 0$.

Уравнение для потенциала примет вид

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2(V_1-\eta_1+\eta)}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}+\eta} dv + \frac{e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2\eta}}^{-\sqrt{2(V_1-\eta_1+\eta)}} e^{-\frac{v^2}{2}+\eta} dv. \tag{16}$$

Произведя замену переменных $y = \frac{v^2}{2} - \eta$, получим

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{2(y+\eta)}} + 2 \int_{-(\eta_1-V_1)}^{0} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{2(y+\eta)}} \right\}. \tag{17}$$

Проинтегрировав (17), будем иметь

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left\{ \frac{2e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\sqrt{y+\eta} - \sqrt{y}\right) dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-(\eta_1-V_1)}^{0} e^{-y} \left(\sqrt{y+\eta} - \sqrt{y}\right) dy + C \right\}^{+\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Постоянную интегрирования $C$ можно найти из условия непрерывности электрического поля на границе первой и второй областей. Используя (11) и (18), получим

$$C = + \frac{4e^{\varphi_1 - \eta_1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-(\eta_1 - V_1)}^{0} e^{-y} \sqrt{y}\, dy. \tag{19}$$

Интегрируя (18) и определяя постоянную из условия непрерывности потенциала, получим окончательно

$$\xi_1 = -e^{\frac{\eta_1 - \varphi_1}{2}} \int\limits_{\eta_1 - V_1}^{\eta} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} (\sqrt{y + \eta} - \sqrt{y})\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-(\eta_1 - V_1)}^{0} e^{-y} \sqrt{y + \eta}\, dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta - e^{\frac{\eta_1 - \varphi_1}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\eta_1 - V_1} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} (\sqrt{y + \eta} - \sqrt{y})\, dy + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\eta}^{0} e^{-y} \sqrt{y + \eta}\, dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta. \tag{20}$$

Уравнение для определения параметра $\eta_1$ можно получить, подставляя значения $\xi$ из (20) и (13) в выражение (9). В развернутой форме это уравнение имеет вид

$$e^{\frac{\eta_1 - \varphi_1}{2}} \int\limits_{\eta_1 - V_1}^{\eta_1} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} (\sqrt{y + \eta} - \sqrt{y})\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-(\eta_1 - V_1)}^{0} e^{-y} \sqrt{y + \eta}\, dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta +$$

$$+ e^{\frac{\eta_1 - \varphi_1}{2}} \int\limits_0^{\eta_1 - V_1} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} (\sqrt{y + \eta} - \sqrt{y}) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\eta}^{0} e^{-y} \sqrt{y + \eta}\, dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta + e^{\frac{\eta_1 - \varphi_1}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\eta_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} (\sqrt{y + \eta} - \sqrt{y})\, dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta = l. \tag{21}$$

Приведенные выражения определяют статическую характеристику диода для данного случая. Решение пригодно и для $\varphi_2 < 0$.

### 3. РЕЖИМ РАБОТЫ ДИОДА, ПРИ КОТОРОМ СУЩЕСТВУЕТ МИНИМУМ ПОТЕНЦИАЛА, НО ВИРТУАЛЬНЫЙ КАТОД НЕ ВОЗНИКАЕТ (II РЕЖИМ)

Решение для данного случая находим методом, использованным в предыдущем параграфе. Выделяем две области диода (рис. 2): $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ (первая область) и $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ (вторая область).

Для первой области

$$f(\xi, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2} + \eta - \eta_1 + \varphi_1} \quad \text{при} \quad \infty \geqslant v \geqslant \sqrt{2(V_1 - \eta_1 + \eta)},$$

$$f(\xi, v) = 0 \qquad \text{при} \quad v < \sqrt{2(V_1 - \eta_1 + \eta)}. \tag{22}$$

Уравнение для потенциала совпадает с (16), если в (16) опустить второй член правой части. После простых преобразований, аналогичных проделанным ранее, получим

$$\frac{d^2\eta}{d\xi_1^2} = \frac{e^{\varphi_1-\eta_1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_1-\eta_1}^{\infty} \frac{e^{-v}dy}{\sqrt{2(y+\eta)}}. \tag{23}$$

После интегрирования (23) найдем $\xi$ как функцию $\eta$:

$$\xi_1 = -e^{\frac{\eta_1-\varphi_1}{2}} \int_0^{\eta} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{V_1-\eta_1}^{\infty} e^{-v}\left(\sqrt{y+\eta}-\sqrt{y}\right)dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta. \tag{24}$$

Решение во второй области ничем не отличается от (24), за исключением того, что $\xi_2 = -\xi_1$. Нетрудно видеть, что при $\eta_1 = V_1$ (24) совпадает с (13) и (20).

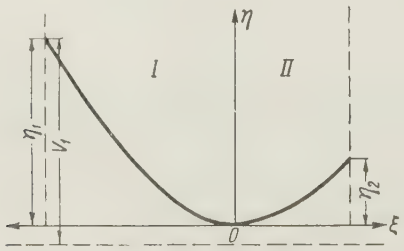



Рис. 2

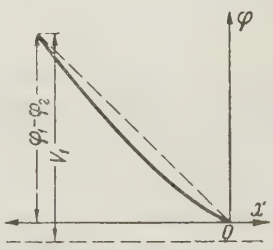



Рис. 3

Рис. 2. Качественная картина распределения потенциала в диоде при условии, что минимум потенциала существует, но виртуальный катод не возникает (II режим)

Рис. 3. Качественная картина распределения потенциала в диоде в отсутствие минимума потенциала. Случай, когда $\varphi_2 \geqslant -\varphi_0$ (I режим)

Уравнение для определения $\eta_1$, совпадающее с (21) при $\eta_1 = V_1$, имеет вид

$$e^{\frac{\eta_1-\varphi_1}{2}} \int_0^{\eta_1} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{V_1-\eta_1}^{\infty} e^{-v}\left(\sqrt{y+\eta}-\sqrt{y}\right)dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta + e^{\frac{\eta_1-\varphi_1}{2}} \times$$

$$\times \int_0^{\eta_1-(\varphi_1-\varphi_2)} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{V_1-\eta_1}^{\infty} e^{-v}\left(\sqrt{y+\eta}-\sqrt{y}\right)dy \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta = l. \tag{25}$$

## 4. РЕЖИМ РАБОТЫ ДИОДА, ПРИ КОТОРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА НЕ ОБЛАДАЕТ МИНИМУМОМ (I РЕЖИМ)

Сначала рассмотрим случай, когда $\varphi_2 \geqslant -\varphi_0$. Пусть начало отсчета координат совпадает с отражателем. Потенциал $\varphi$ также будем отсчитывать от отражателя (рис. 3). Тогда решение кинетического уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} &f(x, v) = \frac{e^{\varphi_2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}+\varphi} && \text{при } \infty \geqslant v \geqslant \sqrt{2(V_1-\varphi_1+\varphi_2+\varphi)}, \\ &f(x, v) = 0 && \text{при } v < \sqrt{2(V_1-\varphi_1+\varphi_2+\varphi)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя эту функцию в уравнение Пуассона и производя преобразования, аналогичные проделанным ранее, получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = e^{\frac{\varphi_2}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{V_1-(\varphi_1-\varphi_2)}^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_1 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

где $C_1$ — постоянная интегрирования. Интегрируя по $\varphi$, получим $x$ как функцию $\varphi$:

$$x = -e^{-\frac{\varphi_2}{2}} \int\limits_0^{\varphi} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{V_1-(\varphi_1-\varphi_2)}^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_1 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi. \tag{28}$$

Постоянная $C_1$ определяется из условия

$$e^{-\frac{\varphi_2}{2}} \int\limits_0^{\varphi_1-\varphi_2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{V_1-(\varphi_1-\varphi_2)}^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_1 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi = l. \tag{29}$$

При малых плотностях электронов в пучке $l \to 0$ и, следовательно, $C_1 \to \infty$. Уравнения (28) и (29) приводят при этом к линейному падению потенциала:

$$\varphi = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} x. \tag{30}$$

Отметим, что (29) должно совпадать с (25), если положить в (25) $\eta_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ (минимум потенциала находится на отражателе; режимы I и II совпадают). Следовательно, в этом случае

$$C_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{V_1-(\varphi_1-\varphi_2)}^{\infty} e^{-y} \sqrt{y}\, dy. \tag{31}$$

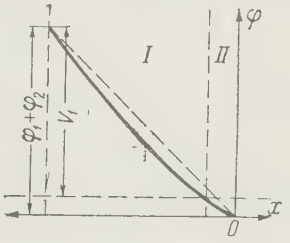



Рис. 4. Качественная картина распределения потенциала в диоде в отсутствие минимума потенциала. Случай, когда $\varphi_2 < -\varphi_0$ (I режим)

Данное значение $C_1$ является минимальным при фиксированных $V_1$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$, так как в противном случае $l$ перестает быть вещественным. Если, кроме того, $V_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ (все три режима совпадают), то $C_1 = -1$.

Перейдем теперь к случаю $\varphi_2 < -\varphi_0$. При этом условии в пространстве диода следует различать две области (рис. 4): $\varphi_1 + \varphi_2 \geqslant \varphi \geqslant \varphi_1 + \varphi_2 - V_1$ (первая область) и $\varphi_1 + \varphi_2 - V_1 \geqslant \varphi \geqslant 0$ (вторая область).

В первой области

$$f(x, v) = \frac{e^{-\varphi_2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}+\varphi} \quad \text{при} \quad \infty \geqslant v \geqslant \sqrt{2(V_1 - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi)} \tag{32}$$

$$\text{и} \quad -\sqrt{2(V_1 - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi)} \geqslant v \geqslant -\sqrt{2\varphi},$$

$f(x, v) = 0$ для всех остальных значений $v$.

После подстановки (32) в правую часть уравнения для потенциала и тех же преобразований, что и в предыдущих случаях, получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = e^{-\frac{\varphi_2}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-(\varphi_1+\varphi_2-V_1)}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

$C_2$ — постоянная интегрирования. Отсюда

$$x_1 = -e^{\frac{\varphi_2}{2}} \int\limits_{\varphi_1+\varphi_2-V_1}^{\varphi} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-(\varphi_1+\varphi_2-V_1)}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi - x_{02}, \qquad (34)$$

где $x_{02}$ — значение координаты $x$ в точке $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - V_1$.

Во второй области

$$\begin{aligned} f(x, v) &= \frac{e^{-\varphi_2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_2}{2}+\varphi} \quad \text{при } \infty \geqslant v \geqslant -\sqrt{2\varphi}, \\ f(x, v) &= 0 \qquad\qquad\quad \text{при } v < -\sqrt{2\varphi}. \end{aligned} \qquad (35)$$

Производная от потенциала, соответствующая функции (35), имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = e^{-\frac{\varphi_2}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\varphi}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\varphi} + C_2' \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (36)$$

Из непрерывности этой производной вытекает, что $C_2' = C_2$. Интегрируя (36), получим

$$x_2 = -e^{\frac{\varphi_2}{2}} \int\limits_0^{\varphi} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\varphi}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi. \qquad (37)$$

Используя (34) и (37), запишем уравнение для определения $C_2$:

$$e^{\frac{\varphi_2}{2}} \int\limits_{\varphi_1+\varphi_2-V_1}^{\varphi_1+\varphi_2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-(\varphi_1+\varphi_2-V_1)}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi + e^{\frac{\varphi_2}{2}} \int\limits_0^{\varphi_1+\varphi_2-V_1} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\varphi}^{0} e^{-y} \sqrt{y+\varphi}\, dy + C_2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi = l. \qquad (38)$$

Уравнение (38) должно перейти в (21), если $\eta_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_2 < 0$. Это будет иметь место при $C_2 = -1$. Данное значение $C_2$ является минимальным.

## 5. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ОСУЩЕСТВЛЯЮТСЯ РАЗЛИЧНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ ДИОДА

Прежде всего следует указать, при каких значениях задерживающего потенциала $\varphi_2$ могут реализоваться различные режимы работы диода.

Решение, соответствующее виртуальному катоду в пространстве сетка — отражатель, может иметь место как при положительных, так и при отрицательных потенциалах $\varphi_2$.

II режим может реализоваться только при $\varphi_2 \geqslant -\varphi_0$, как это непосредственно видно из рис. 2. I режим может существовать как при $\varphi_2 > -\varphi_0$, так и при $\varphi_2 < -\varphi_0$. Решения для этих случаев имеют различную форму.

Перейдем теперь к основному вопросу: при каких плотностях начального тока реализуются различные режимы, если потенциалы сетки и отражателя фиксированы? Рассмотрим наиболее интересный случай $\varphi_2 > -\varphi_0$, когда все три режима могут иметь место.

При найденной нами форме решения удобно рассматривать не плотность начального тока, а $l = d\sqrt{\frac{4\pi e^2 N_0}{kT}}$ — безразмерное расстояние между сеткой

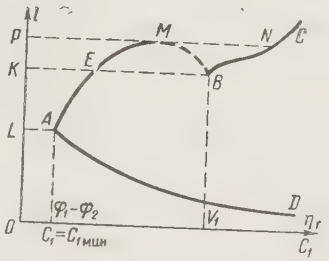



Рис. 5. Примерный характер зависимости безразмерного расстояния между сеткой и отражателем от параметров $\eta_1$ и $C_1$ для различных режимов работы диода. Кривая $AD$ соответствует I режиму; $AEMB$ — II режиму; $BC$ — III режиму

и отражателем, введенное ранее. В этом выражении $N_0$ — величина, прямо пропорциональная току, проходящему сквозь сетку:

$$j = eN_0\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,e^{-\frac{e\varphi_0}{kT}}. \tag{39}$$

Нужно выяснить, при каких значениях безразмерного расстояния $l$ могут реализоваться те или иные режимы. Возможные значения $l$ при фиксированных $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $V_1$ определяются по формулам (21), (25), (29) и (38), которые выражают зависимость $l$ от параметров $\eta_1$ и $C_1$. Область изменения параметра $\eta_1$ видна из рис. 1 и 2. Для III режима $\eta_1 \geqslant V_1$; для II режима $\varphi_1 - \varphi_2 \leqslant \eta_1 \leqslant V_1$. В случае I режима

$$C_1 \geqslant -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{V_1-(\varphi_1-\varphi_2)}^{\infty} e^{-y}\sqrt{y}\,dy. \tag{40}$$

На рис. 5 кривая $BC$ изображает примерную зависимость $l$ от $\eta_1$ для III режима. Согласно (21) $l$ монотонно возрастает с ростом $\eta_1$. Следовательно, III режим может реализоваться только при $l \geqslant OK$, т. е. при условии

$$l \geqslant e^{\frac{\varphi_0}{2}}\int\limits_0^{V_1}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-y}\left(\sqrt{y+\eta}-\sqrt{y}\right)dy\right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta + \\ + e^{\frac{\varphi_0}{2}}\int\limits_0^{V_1-(\varphi_1-\varphi_2)}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-y}\left(\sqrt{y+\eta}-\sqrt{y}\right)dy\right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta. \tag{41}$$

Кривая $AB$ (рис. 5) изображает примерный ход $l(\eta_1)$ для II режима (по результатам проведенного численного интегрирования). Самым существенным обстоятельством здесь является наличие максимума в точке $M$. Возможные значения $l$ для II режима лежат внутри интервала $OL \leqslant l \leqslant OP$. На рис. 5 указана область существования I режима. Согласно (29) $l$ монотонно убывает с ростом $C_1$. I и II режимы совпадают при выполнении равенства (31) и условии $\eta_1 = \varphi_1 - \varphi_2$. Следовательно, допустимые значения $l$ можно представить кривой $AD$. Первому режиму соответствуют значения $l$ в интервале $0 \leqslant l \leqslant OL$.

Кривые $BC$, $AB$ и $AD$ дают границы существования различных режимов и объясняют гистерезисный характер изменения тока на отражатель

в зависимости от начального тока. При малых токах реализуется I режим. По мере возрастания тока непрерывно осуществляется переход ко II режиму без изменения тока на отражатель. При значении тока, соответствующем $I = OP$ (точка $M$ на кривой $AB$), диод скачком переходит в III режим (точка $N$ на кривой $BC$) и ток на отражатель резко падает, так как образуется виртуальный катод. При уменьшении начального тока диод работает в III режиме вплоть до $I = OB$, когда скачком диод переходит во II режим (точка $E$ на кривой $AB$) (возможен переход и в I режим при некоторых значениях $\varphi_1$ и $\varphi_2$). В этом случае резкого скачка тока на отражатель не будет, так как при $\eta_1 = V_1$ ток II режима равен току III режима. Участок кривой $MB$ не может реализоваться.

Такого же рода гистерезисный характер тока на отражатель должен наблюдаться и при постоянном токе сквозь сетку, но при меняющемся потенциале $\varphi_2$.

Отметим, что экспериментально наблюдаемые скачки тока имеют резко выраженный характер только при переходе диода из II режима в III. При обратном переходе ток меняется достаточно быстро, но все же плавно. Этот результат качественно согласуется с изложенной выше теорией. Отметим еще, что при $\varphi_2 < -\varphi_0$ II режим не реализуется и, следовательно, гистерезисной зависимости для тока не должно быть. Этот вывод также находится в соответствии с экспериментом.

В заключение выражаю благодарность А. И. Костиенко, Р. Л. Стратоновичу и М. Н. Девяткову за интерес к работе и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, ГТТИ, 1956, стр. 96—134.
2. А. И. Костиенко, М. Н. Девятков, А. А. Лебедь, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 482.
3. Г. Я. Мякишев, Вестн. Моск. ун-та, 1960, 3, 5, 19.
4. А. А. Власов, Теория многих частиц, ГТТИ, 1950.
5. Л. А. Вайнштейн, Теория дробового эффекта при наличии пространственного заряда, Сб. научных трудов, вып. XI, Изд. Советское радио, 1948.
6. Л. Э. Пергаманик, ЖЭТФ, 1957, 33, 1, 251.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
15 VI 1960

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДИОДАХ ПРИ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСАХ ПРЯМОГО ТОКА

*Ю. Р. Носов*

Рассмотрены импульсные параметры, описывающие переходный процесс при переключении диода из прямого направления в обратное. Получены зависимости этих параметров от длительности протекания прямого тока.

## ВВЕДЕНИЕ

В работах, посвященных рассмотрению процесса переключения полупроводникового диода из проводящего состояния в запертое, длительность протекания прямого тока обычно предполагается столь большой, что распределение дырок в базе диода* можно считать установившимся [1, 2, 3].

Однако в практике использования диодов в быстродействующих схемах приходится все чаще оперировать с весьма короткими импульсами прямого тока. Поэтому интересно рассчитать, как могут изменяться параметры, описывающие переходную характеристику диода, при неустановившемся распределении дырок в базе.

С другой стороны, разработка методик измерения импульсных параметров полупроводниковых диодов нередко требует пропускания через диод перед переключением весьма коротких импульсов прямого тока (в импульсных генераторах увеличение крутизн фронтов связано, как правило, с сокращением возможной длительности импульсов). Для этой цели важно определить минимальную длительность прямого тока, необходимую для достижения установившегося распределения дырок в базе диода.

Целью настоящей работы и является выяснение влияния длительности импульса прямого тока на характер переходного процесса при переключении диода из прямого направления в обратное.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим модель одномерного плоскостного диода с резким ступенчатым $p$ — $n$-переходом и полубесконечной базовой областью, причем проводимость $p$-области предполагается много больше проводимости $n$-области (см. рис. 1). Как и в указанных выше работах, уровень инжекции предполагается малым, а время жизни дырок в базе — постоянным. Влияние электростатической емкости $p$ — $n$-перехода на характер нестационарных процессов исключается**.

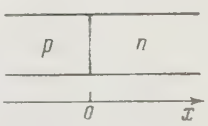



Рис. 1. Модель одномерного плоскостного диода

Сделанным допущениям в какой-то мере удовлетворяют промышленные отечественные типы импульсных диодов, представляющих собой псевдоточечные структуры (например, диоды Д9, Д11—Д14, Д101—Д103). В большем

* В дальнейшем принято, что база диода имеет проводимость $n$-типа, так что неосновными носителями в ней являются дырки.

** Более полно основные предположения, на которые опирается современная теория переходных процессов в полупроводниковых диодах, сформулированы в [4].

согласии с рассматриваемой моделью находятся микроплоскостные кремниевые и германиевые быстродействующие диоды.

Поведение дырок в базе диода описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{p - p_{n0}}{\tau_p}, \tag{1}$$

где $p$ — плотность; $D_p$ — коэффициент диффузии; $\tau_p$ — время жизни; $p_{n0}$ — равновесная плотность дырок в базе.

Пренебрегая величиной $p_{n0}$ по сравнению с $p$ и вводя безразмерные переменные времени $\Theta = t/\tau_p$ и расстояния $X = x/L_p$ ($L_p$ — диффузионная длина дырок в базе), получаем уравнение диффузии в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} - p. \tag{1а}$$

Плотность тока через $p-n$-переход выражается следующей формулой:

$$j = -\frac{qD_p}{L_p} \frac{\partial p}{\partial X}\bigg|_{X=0}. \tag{2}$$

В стационарном состоянии распределение дырок в базе имеет вид

$$p = p_{n0} e^{qU_{\text{пр}}/kT} e^{-x/L_p} = p_0 e^{-X}, \tag{3}$$

где $U_{\text{пр}}$ — прямое смещение на диоде; $q$ — заряд электрона; $k$ — постоянная Больцмана; $T$ — абсолютная температура; $p_0$ — концентрация дырок вблизи $p-n$-перехода в установившемся состоянии. Следовательно, для стационарного процесса протекания тока справедливо

$$j = \frac{qD_p p_0}{L_p}. \tag{4}$$

Решение сформулированной во введении задачи распадается на два этапа: 1) расчет установления распределения дырок в базе при включении диода в прямом направлении; 2) расчет переходной характеристики диода при переключении его в обратное направление с учетом полученного распределения.

## 2. УСТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЫРОК ПРИ ПРОПУСКАНИИ ИМПУЛЬСА ПРЯМОГО ТОКА

Скачкообразное изменение плотности прямого тока от нуля до $j_{\text{пр}}$ приводит к возникновению градиента концентрации дырок вблизи $p-n$-перехода, равного

$$\frac{\partial p}{\partial X}\bigg|_{X=0} = -\frac{j_{\text{пр}} L_p}{qD_p} = p_0, \quad t > 0. \tag{5}$$

До момента подачи прямого импульса концентрация дырок в базе диода пренебрежимо мала:

$$p(X, 0) = 0, \quad t = 0. \tag{6}$$

Решим уравнение диффузии (1а), приняв начальное распределение (6) и граничное условие (5). Подстановкой

$$p = e^{-\Theta} U(X, \Theta) \tag{7}$$

уравнение (1а) приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (8) при помощи двухмерного преобразования Лапласа — Карсона [5] и учитывая подстановку (7), получаем

$$p = p_0 \frac{1}{2}\left\{e^{-X}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\Theta}} - \sqrt{\Theta}\right) - e^{X}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\Theta}} - \sqrt{\Theta}\right)\right\}^{*}. \qquad (9)$$

Графики зависимости $\frac{p}{p_0}(X)$ при различных фиксированных значениях $\Theta$ приведены на рис. 2.

Из решения (9) легко получить

$$p_{X=0} = p_0 \operatorname{erf}\sqrt{\Theta}. \qquad (10)$$

Отсюда нарастание напряжения на $p-n$-переходе подчиняется закону

$$U_{\text{пр}}(\Theta) = \frac{kT}{q}\ln\frac{p_{X=0}}{p_{n0}} = U_{\text{пр уст}} - \frac{kT}{q}\ln\left[\operatorname{erf}\sqrt{\Theta}\right]^{-1}, \qquad (11)$$

где $U_{\text{пр уст}}$ — напряжение на $p-n$-переходе при установившемся распределении дырок в базе.

Так как обычно $U_{\text{пр уст}}$ порядка 0,25—0,5 *в* и при комнатной температуре $kT/q \approx 0{,}025$ *в*, напряжение на $p-n$-переходе достигает 0,8 от своего установившегося значения при условии $\ln\left[\operatorname{erf}\sqrt{\Theta}\right] \approx -(2-4)$, что приводит к $\Theta = 0{,}02-0{,}004$. Столь малая величина $\Theta$ объясняет тот факт, что установление напряжения на $p-n$-переходе экспериментально не наблюдается, так как оно происходит обычно за время, которое меньше разрешающего времени используемой аппаратуры.

Рассмотрение графиков рис. 2 показывает, что при $\Theta \ll 1$ распределение дырок в базе можно приближенно описать экспоненциальной зависимостью вида

$$p(X, \Theta) = p(\Theta)\, e^{-x/l(\Theta)}. \qquad (12)$$

Определим величины $p(\Theta)$ и $l(\Theta)$. Используя разложение в ряд интеграла ошибок, из формулы (10) получаем

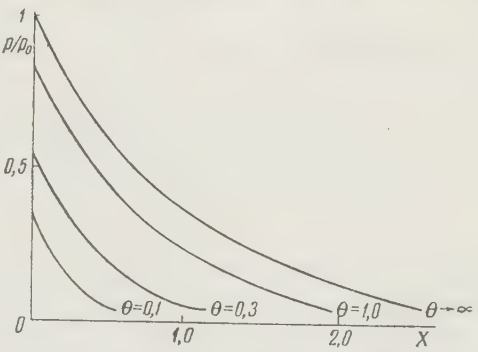



Рис. 2. Распределение плотности дырок в базе диода при различных длительностях импульса прямого тока

$$p(\Theta) = p_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\Theta}. \qquad (13)$$

Интегрируя уравнение (1) по объему базы и замечая, что $q\int_0^{\infty} p\,dx = Q_{\text{н}}$ — полный заряд дырок, накопленных в базе, отнесенный к единице площади $p-n$-перехода, получаем следующее уравнение для процесса этого накопления:

$$\Theta_{\text{н}}(\Theta) = Q_{\text{н}}(\Theta \to \infty)(1 - e^{-\Theta}), \qquad (14)$$

причем $Q_{\text{н}}(\Theta \to \infty) = qp_0L_p$. При $\Theta \ll 1$ имеем

$$Q_{\text{н}}(\Theta) = Q_{\text{н}}(\Theta \to \infty)\Theta = qp_0L_p\Theta. \qquad (15)$$

Интегрирование (12), умноженного на $q$, по объему базы дает

$$Q_{\text{н}}(\Theta) = p(\Theta)\, l(\Theta)\, q. \qquad (16)$$

* Здесь и в дальнейшем принято $\operatorname{erfc} z \equiv 1 - \operatorname{erf} z \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z} e^{-y^2}\,y$.

Приравнивая выражения (15) и (16) и учитывая (13), получаем

$$l(\Theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{\Theta}} L_p. \tag{17}$$

Таким образом, распределение дырок в базе диода при $\Theta \ll 1$ можно описать выражением

$$p(X, \Theta) = p_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\Theta}\, e^{-\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\Theta}}\right)}. \tag{18}$$

Численные оценки, проведенные при $\Theta = 0{,}1$, показывают, что выражения (18) и (9) отличаются не более, чем на 3% при любых значениях $X$.

Приближенно полагая $2/\sqrt{\pi} \simeq 1$, замечаем что распределение дырок в базе диода при малой длительности импульса прямого тока ($t \ll \tau_p$) такое же, как и для стационарного случая, если в последнем концентрацию дырок вблизи $p$ — $n$-перехода $p_0$ и диффузионную длину $L_p$ уменьшить в $1/\sqrt{\Theta}$ раз.

В заключение этого параграфа найдем установление распределения дырок в базе при мгновенной подаче прямого напряжения* на $p$ — $n$-переход**, т. е. проинтегрируем уравнение (1а) при начальном условии (6) и граничном условии

$$p|_{X=0} = p_0 \text{ при } t > 0. \tag{19}$$

Решение ведется так же, как и для случая постоянства тока и имеет вид

$$p(X, \Theta) = \frac{p_0}{2}\left\{e^{-X}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\Theta}} - \sqrt{\Theta}\right) + e^{X}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\Theta}} + \sqrt{\Theta}\right)\right\}. \tag{20}$$

Плотность тока через $p$ — $n$-переход в процессе установления имеет вид

$$j = j_{\text{пр}}\left[\frac{e^{-\Theta}}{(\pi\Theta)^{1/2}} - \operatorname{erf}\sqrt{\Theta}\right] \tag{21}$$

и при малых $\Theta$ равняется

$$j = j_{\text{пр}}\frac{1}{\sqrt{\pi\Theta}}. \tag{21а}$$

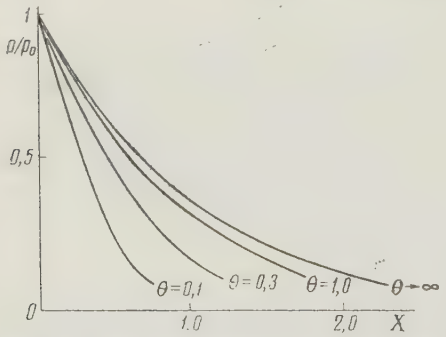



Рис. 3. Распределение плотности дырок в базе диода при различных длительностях импульса прямого напряжения

Накопление заряда дырок в базе диода для этого случая описывается выражением

$$Q_{\text{н}}(\Theta) = \int_0^t j\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Q_{\text{н}}(\Theta \to \infty)\sqrt{\Theta}. \tag{22}$$

Сравнение выражений (15) и (22) показывает, что скорость накопления дырок в базе диода сразу после включения (т. е. $\Theta \ll 1$) для случая приложения импульса напряжения к $p$ — $n$-переходу больше в $1/\sqrt{\Theta}$ раз, чем для случая импульса тока. Физически этот результат объясняется тем, что при импульсе напряжения плотность тока в процессе достижения равновесия все время больше установившейся плотности тока.

* Величина прямого напряжения принимается такой, что при установлении равновесия через диод протекает ток плотности $j_{\text{пр}}$, такой же, как и в предыдущем рассмотрении.

** Такой расчет для диода с тонкой базой проделан в работе [6].

Следует отметить, что в реальных электронных схемах прямое сопротивление диода, как правило, много меньше сопротивления нагрузки, включенной последовательно с ним, т. е. осуществляются условия генератора тока. Поэтому в дальнейшем рассмотрении используется решение, полученное с граничным условием (5), а не (19). Графики $\frac{p(X)}{p_0}$ при различных фиксированных значениях $\Theta$, приведенные на рис. 2 и 3, показывают, что при малых $\Theta$ распределения $p(X, \Theta)$ для случая переключения в режиме генератора напряжения и в режиме генератора тока существенно различны.

## 3. ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ ДИОДА ИЗ ПРЯМОГО НАПРАВЛЕНИЯ В ОБРАТНОЕ

При переключении диода из прямого направления в обратное импульс обратного напряжения прикладывается к $p$ — $n$-переходу и последовательно с ним соединенному сопротивлению $R$ (равному сумме сопротивлений базы диода и нагрузки).

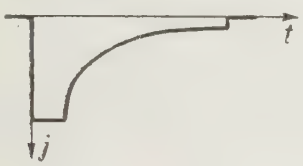



Рис. 4

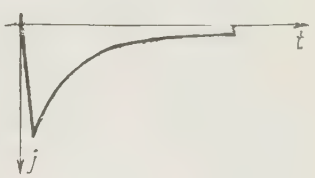



Рис. 5

Рис. 4. Теоретическая переходная характеристика диода при его переключении из прямого направления в обратное

Рис. 5. Переходная характеристика диода при конечной скорости переключения

Вид переходной характеристики для этого процесса представлен на рис. 4. Предельный случай для $R = 0$ приводит [3] к исчезновению «полочки» и к бесконечно большому значению обратного тока в момент переключения. Существуют, однако, два обстоятельства, значительно изменяющие начальную стадию процесса переключения.

В силу конечности максимально возможной скорости дырок $v_{макс}$ ток через $p$ — $n$-переход ограничен [7], причем его величина прямо пропорциональна концентрации дырок вблизи $p$ — $n$-перехода $p_{X=0}$. Другое ограничение обратного тока связано с конечной скоростью любого реального переключения. В этом случае максимальное значение обратного тока также определяется величиной $p_{X=0}$, хотя прямая пропорциональность нарушается.

Вследствие этих ограничений реальная переходная характеристика диода имеет вид, представленный на рис. 5.

Количественная оценка импульсных свойств диода производится путем введения трех параметров.

1. Величины максимального значения обратного тока при переключении $I_{макс}$, характеризующей начальную стадию переходного процесса.

2. Времени восстановления обратного сопротивления диода $\tau_{восст}$, определяемого интервалом времени, протекшим от начала переключения до момента спада обратного тока диода до некоторой заданной величины. Время восстановления обратного сопротивления диода обычно равно (3 -4) $\tau_p$ и характеризует таким образом «хвостовую» часть переходного процесса.

3. Величины электрического заряда, протекшего через диод в обратном направлении при переключении $Q_в$.

Если считать справедливой зависимость $I_{\text{макс}} \sim p_{X=0}$, то

$$I_{\text{макс}}(\Theta_0) = I_{\text{макс}}(\Theta_0 \to \infty)\,\operatorname{erf}\sqrt{\Theta_0};\quad I_{\text{макс}}(\Theta_0) = 0{,}8\, I_{\text{макс}}(\Theta_0 \to \infty)$$

при $\Theta_0 = 0{,}8$.

Для определения зависимости $\tau_{\text{восст}}$ от длительности импульса прямого тока $\Theta_0$* необходимо найти всю переходную характеристику диода.

Проинтегрируем уравнение диффузии (1), приняв начальное распределение

$$p(X, 0) \quad p(X, \Theta_0) \cdot \frac{p_0}{2}\left\{e^{-X}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\Theta_0}} - \sqrt{\Theta_0}\right) - e^{X}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\Theta_0}} + \sqrt{\Theta_0}\right)\right\} \tag{9а}$$

и граничное условие

$$p(0, \Theta) = 0, \quad \Theta > 0. \tag{23}$$

Принятие граничного условия (23) означает, что обратное напряжение мгновенно прикладывается к $p$ — $n$-переходу. Это предположение справедливо, если рассматривается удаленная от начала стадия переходного процесса (как в нашем случае) и при этом сопротивление в цепи диода настолько мало, что длительность полочки, определяемая этим сопротивлением, несущественна**. В большинстве случаев использования импульсных диодов принятие условия (23) оказывается наиболее разумным.

Из общего решения задачи, полученного с использованием функции источника для полубесконечной области, находим

$$\left.\frac{\partial p}{\partial X}\right|_{X=0} = \frac{e^{-\Theta}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}\int_0^\infty p(X, \Theta_0)\, e^{-x^2/4\Theta} X\, dX. \tag{24}$$

Преобразуем начальное распределение (9а) к виду

$$p(X, \Theta_0) = p_0 e^{-X} - \frac{p_0}{2}\left\{e^{-X}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\Theta_0} - \frac{X}{2\sqrt{\Theta_0}}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{X}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\Theta_0} + \frac{X}{2\sqrt{\Theta_0}}\right)\right\} = p_0 e^{-X} - \varphi(X, \Theta_0). \tag{9б}$$

Решение (22) при $p(X, 0) = \varphi(X, \Theta_0)$ подробно рассмотрено в [3], где показано, что при больших значениях $\Theta$ имеет место

$$\frac{e^{-\Theta}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}\int_0^\infty \varphi(X, \Theta_0)\, e^{-\frac{X^2}{4\Theta}} X\, dX = \frac{p_0 e^{-\Theta}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}\left[\frac{2\Theta_0^{1/2} e^{-\Theta_0}}{\pi^{1/2}} + \operatorname{erfc}\Theta_0^{1/2}\right]. \tag{25}$$

При том же условии

$$\frac{e^{-\Theta}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}\int_0^\infty p_0 e^{-X} e^{-\frac{X^2}{4\Theta}} X\, dX = p_0 \frac{e^{-\Theta_0}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}. \tag{26}$$

С учетом (24), (25) и (26) плотность обратного тока диода при больших $\Theta$*** выражается формулой

$$j_{\text{обр}} = j_{\text{пр}} \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial X}\right)_{X=0} = j_{\text{пр}} \frac{e^{-\Theta}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}\left[1 - \left(\frac{2\Theta_0^{1/2} e^{-\Theta_0}}{\pi^{1/2}} + \operatorname{erfc}\Theta^{1/2}\right)\right]. \tag{27}$$

* В дальнейшем длительность импульса прямого тока $\Theta_0$ является параметром, а $\Theta$ — переменной величиной, отсчитываемой от начала переключения.

** Вопрос о количественной связи длительности полочки с сопротивлением в цепи диода рассмотрен в [4].

*** Оценка показывает, что при $\Theta > 3$ погрешность составляет менее 20% по сравнению с $\Theta \to \infty$.

При большой длительности прямого тока ($\Theta_0 \to \infty$) та же зависимость имеет вид [3]

$$j_{\text{обр}} = j_{\text{пр}} \frac{e^{-\Theta}}{2\pi^{1/2}\Theta^{3/2}}. \tag{28}$$

Графики рис. 6 иллюстрируют формулу (27). Нетрудно видеть, что время восстановления обратного сопротивления достигает 0,8 от своего установившегося значения при длительности импульса прямого тока $\Theta_0 \simeq 0{,}8$.

Таким образом, переходный процесс переключения и в начальной (определяемой параметром $I_{\text{макс}}$) и в «хвостовой» (определяемой параметром $\tau_{\text{восст}}$) стадиях практически не зависит от длительности прямого тока, если она превышает 0,8 $\tau_{\text{р}}$.

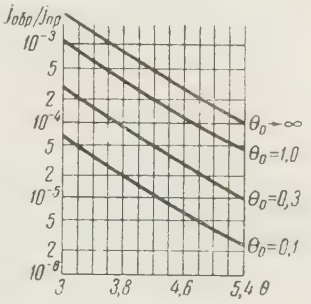



Рис. 6. Зависимость $j_{\text{обр}}/j_{\text{пр}}$ от $\Theta$

Для определения величины заряда, протекающего через диод в обратном направлении при переключении, необходимо знать всю переходную характеристику, что при произвольных значениях $\Theta_0$ найти не удалось.

Найдем переходную характеристику диода при весьма коротких импульсах прямого тока ($\Theta_0 \ll 1$), для чего используем приближенное начальное распределение дырок (18)*.

Найденное таким образом решение будет отличаться от решения для случая действительного начального распределения (9), однако, в силу корректности постановки краевой задачи уравнения диффузии [8], отличие этих решений будет не больше, чем отличие распределений (18) и (9). Не проводя полного интегрирования уравнения диффузии, найдем при помощи операционного метода [5] значение градиента концентрации дырок у $p$ — $n$-перехода

$$\left.\frac{\partial p}{\partial X}\right|_{X=0} = \frac{2p_0\sqrt{\Theta_0}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{-\Theta}}{\sqrt{\pi\Theta}} - \frac{2}{\sqrt{\pi\Theta_0}}\, e^{-\Theta\left(1-\frac{4}{\pi\Theta_0}\right)} \operatorname{erfc}\frac{2\sqrt{\Theta}}{\sqrt{\pi\Theta_0}}\right]. \tag{29}$$

Используя (2) и (29), определим величину заряда, протекшего через диод в обратном направлении после переключения,

$$Q_{\text{в}}(\Theta_0) = \int_0^{\infty} j_{\text{обр}}\, dt = qp_0L_p \frac{\Theta_0}{1+\frac{\sqrt{\pi\Theta_0}}{2}} = Q_{\text{н}}(\Theta_0 \to \infty)\frac{\Theta_0}{1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\Theta_0}}, \tag{30}$$

где $Q_{\text{н}}(\Theta_0 \to \infty)$ — полная величина заряда дырок, накопленных в базе диода, при бесконечной длительности прямого тока. Принимая во внимание (15), получим

$$\xi(\Theta_0) = \frac{Q_{\text{в}}(\Theta_0)}{Q_{\text{н}}(\Theta_0)} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\Theta_0}} \simeq 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\Theta_0}. \tag{31}$$

Рассчитанное здесь выражение $\xi(\Theta_0)$ определяет поправку к импульсному методу измерения коэффициента инжекции $\gamma$ [9] и должно приниматься во внимание при постановке соответствующих экспериментов.

Как известно, при $\Theta_0 \to \infty$ $\xi(\Theta_0) \to 1/2$ и, следовательно, возможные значения $\xi(\Theta_0)$ лежат между 1 и 1/2. Так как полный заряд $Q_{\text{н}}$, протекший через диод, при прохождении импульса прямого тока равен $Q_{\text{н}} = I_{\text{пр}}t_0 = Q_{\text{н}}(\Theta_0 \to \infty)\Theta_0$, то учитывая (14), получаем

$$\eta = \frac{Q_{\text{в}}}{Q_{\text{н}}} = \xi\frac{1-e^{-\Theta_0}}{\Theta_0}. \tag{32}$$

* Здесь, как и ранее, принято граничное условие (23).

Коэффициент $\eta^*$ характеризует вентильную способность диода при использовании его в переключающем режиме. Как видно из (32), при $\Theta_0 = 1$ $\eta(\Theta_0) = 0{,}3—0{,}5$ и лишь при $\Theta_0 = 5$ $\eta(\Theta_0) = 0{,}1$. Это означает, что вентильная способность диода при работе с короткими импульсами прямого тока ($\Theta_0 \lesssim 1$) существенно ухудшается.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Импульсные параметры, характеризующие переключение диода из прямого направления в обратное, практически достигают своих установившихся значений при длительности импульса прямого тока $t_{\text{пр}} > 0{,}8\,\tau_p$.

2. При подаче импульса прямого тока установление напряжения на $p-n$-переходе происходит за время $t \lesssim 0{,}02\,\tau_p$.

3. При коротких импульсах прямого тока ($t_{\text{пр}} \ll \tau_p$) распределение дырок в базе имеет экспоненциальный характер, причем предэкспоненциальный член и показатель экспоненты уменьшены в $\sqrt{\pi}/2\sqrt{\Theta}$ раз по сравнению с установившимся распределением.

4. При измерении $\gamma$ импульсным методом необходимо вводить коэффициент $\xi = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\Theta_0}$, учитывающий рекомбинацию дырок в базе диода.

5. Вентильная способность диода, работающего в переключающем режиме, резко ухудшается при длительности импульсов прямого тока $t_{\text{пр}} \lesssim \tau_p$.

Автор выражает благодарность К. С. Ржевкину и Б. Г. Менделеву за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Kingston, Proc. I. R. E., 1954, 42, 5, 829.
2. B. Lax, S. F. Neustadter, J. Appl. Phys., 1954, **25**, 9, 1148.
3. I. G. Henderson, I. P. Tillman, Proc. I. E. E., 1957, **104**, p. B, **15**, 318.
4. Ю. Р. Носов, Переходные характеристики полупроводниковых диодов, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, под ред. Я. А. Федотова, Изд. Советское радио, вып. 4, 1959, стр. 3.
5. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Физматгиз, 1958.
6. Л. М. Баранов, М. С. Бекбулатов, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 4, 703.
7. T. R. Scott, Proc. I. E. E., 1957, **107**, p. B, **15**, 333.
8. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1954.
9. O. L. Curtic, B. R. Gossick, Rev. Scient. Instrum., 1956, **27**, 10, 828.

Поступила в редакцию
23 V 1960

* Эта величина аналогична коэффициенту выпрямления диода (отношение прямого тока к обратному), характеризующему выпрямляющие свойства диода в статическом режиме.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 2

# МОЛЕКУЛЯРНЫЙ СТАНДАРТ ЧАСТОТЫ С ВЫЧИТАНИЕМ ОШИБКИ ОПОРНОГО ГЕНЕРАТОРА

*В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский*

Кратко рассмотрен ряд схем получения стандартных частот на основе молекулярного генератора. Проведен расчет стандарта частоты с вычитанием ошибки опорного генератора, дающего стабильные частоты в сантиметровом, дециметровом и метровом диапазонах волн. Разработаны схемы исследования частотно-фазовой стабильности получаемого стандартного сигнала: 1) при помощи вспомогательного молекулярного генератора, 2) при помощи вспомогательного кварцевого генератора и умножителя частоты.

Появление молекулярного генератора [1, 2], открывшее широкие перспективы создания высокостабильных стандартов частоты и времени, потребовало разработки методов перенесения его стабильности в диапазон радиоволн с одновременным увеличением мощности. За прошедшее время разными авторами было предложено большое количество схем, дающих возможность практически использовать высокую стабильность молекулярного генератора. Если отвлечься от чисто технических различий этих схем, то по принципу работы их можно разделить на три основные группы.

I. Схемы сравнения частоты молекулярного генератора и вспомогательного генератора (обычно с кварцем), позволяющие с большой точностью измерять уходы последнего от первоначального номинала [3, 4, 9].

II. Схемы автоподстройки вспомогательного генератора по молекулярному, отличающиеся от схем группы I наличием управляющего звена, воздействующего на вспомогательный генератор (частотная или фазовая автоподстройка) [5, 6, 7, 8].

III. Схема образования эталонной частоты путем вычитания нестабильности опорного генератора (см. рис. 1 и 2), предложенная авторами в 1955 г. [9]. Эта схема обладает рядом преимуществ по сравнению с вышеуказанными: во-первых, отсутствием обратной связи, что снимает вопрос об устойчивости системы в целом, во-вторых, отсутствием воздействия на генератор с кварцем, что обеспечивает более чистый спектр эталонной частоты. Однако эта схема в первоначальном виде имела и существенные недостатки.

1. Из-за больших трудностей получения непосредственно с умножителя частоты (см. рис. 1) гетеродинной мощности необходимо применение вспомогательного гетеродина (см. рис. 2), имеющего достаточно высокую стабильность частоты, которая определяется полосой пропускания УПЧ (100 *кгц*). Это приводит к усложнению схемы и к дополнительной фазовой модуляции полезного сигнала.

2. Для получения хорошей фильтрации вычитающие блоки должны иметь высокую эквивалентную добротность.

3. Схема обеспечивает получение только одного значения стабильной частоты.

В связи с этими недостатками была проведена разработка более совершенного варианта схемы с вычитанием ошибки. При этом была поставлена задача, во-первых, обойтись без вспомогательного гетеродина, во-вторых, облегчить фильтрацию в вычитающих блоках и, в-третьих, получить ста-

бильные частоты одновременно в сантиметровом, дециметровом и метровом диапазонах волн. В результате работы была спроектирована схема эталона частоты с вычитанием ошибки опорного генератора, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям (см. рис. 3).

Как видно из схемы, задача получения гетеродинной мощности решается применением фазовой автоподстройки клистрона $f_1$ по генератору с кварцем $f_{кв}$ и фазовой автоподстройки клистрона $f_2$ по клистрону $f_1$ с использованием того же генератора $f_{кв}$ в качестве опорного. Применение указанной цепочки фазовой стабилизации дает возможность производить

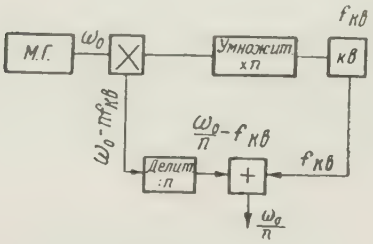



Рис. 1

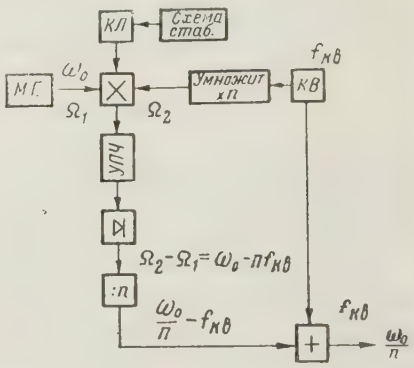



Рис. 2

вычитание ошибки на трех частотах одновременно: $f_2$, $f_1$ и $f_{кв}$. Кроме того, построение и наладка схем фазовой автоподстройки при этом значительно облегчаются ввиду большой величины сигналов, снимаемых со смесителей (смеситель на частоте $f_1$ дает сигнал в несколько десятков милливольт,

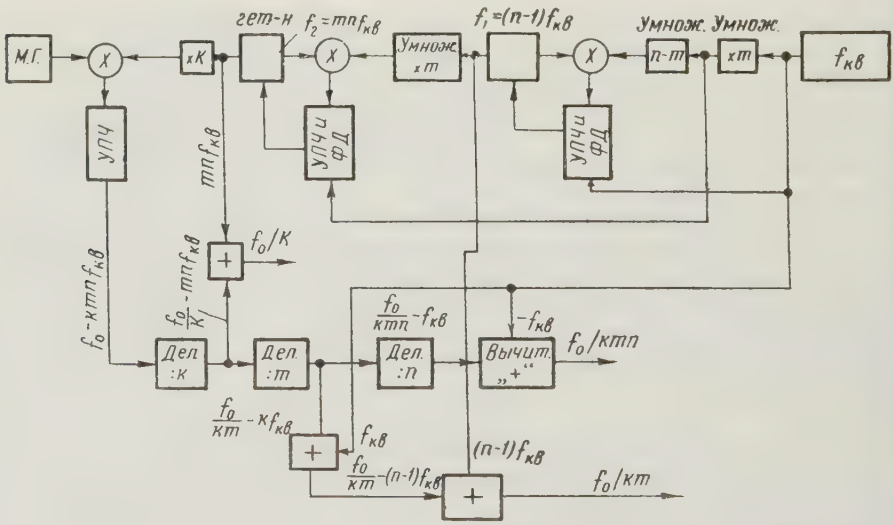



Рис. 3

смеситель на частоте $f_2$ — несколько сот милливольт). Такая цепочка фазовой автоподстройки эквивалентна умножителю частоты с мощным выходом, так как фазовые дрейфы самой фазовой автоподстройки малы [10].

Рассмотрим соотношения, которые должны выполняться в этой схеме.

Для работы фазовой автоподстройки $f_1$ по $f_{кв}$ с использованием $f_{кв}$ в качестве опорного сигнала необходимо, чтобы

$$f_1 = (n \pm 1) f_{кв}. \qquad (1)$$

Ниже показано, что выгоднее выбирать в (1) знак минус:

$$f_1 = (n-1) f_{кв}. \tag{2}$$

Далее, для фазовой автоподстройки $f_2$ по $f_1$ выбираем следующее соотношение частот:

$$f_2 = mf_1 + mf_{кв} \tag{3}$$

или, используя (2),

$$f_2 = (mn - m + m) f_{кв} = mnf_{кв}. \tag{4}$$

Частота $f_2$ выбирается в районе $k$-го унтертона частоты молекулярного генератора, т. е.

$$f_{УПЧ} = f_0 - kmnf_{кв}. \tag{5}$$

Посмотрим теперь, как будет производиться вычитание ошибки на частотах $f_2$, $f_1$ и $f_{кв}$.

Вычитание на частоте $f_2$. В этом случае промежуточная частота (5) должна быть разделена в $k$ раз. Прибавляя затем $f_2$, получим

$$\frac{f_0 - kmnf_{кв}}{k} + f_2 = \frac{f_0}{k} - mnf_{кв} + mnf_{кв} = \frac{f_0}{k}. \tag{6}$$

При этом получается стабильная частота в сантиметровом диапазоне волн, так как практически, из-за необходимости иметь от генератора $f_2$ гетеродинную мощность в диапазоне молекулярного генератора, $k = 1, 2, 3$.

Вычитание на частоте $f_1$. Кратность деления $f_{УПЧ}$ должна быть равна $km$. Прибавляя затем $f_1$, получим

$$\frac{f_0 - kmnf_{кв}}{km} + f_1 = \frac{f_0}{km} - nf_{кв} + (n-1) f_{кв} = \frac{f_0}{km} - f_{кв}. \tag{7}$$

Отсюда видно, что для получения стабильной частоты к (7) следует добавить $f_{кв}$:

$$\frac{f_0}{km} - f_{кв} + f_{кв} = \frac{f_0}{km}. \tag{8}$$

При $m = 3 \div 10$ получаем стабильную частоту в дециметровом диапазоне волн.

Вычитание на частоте $f_{кв}$. Кратность деления $f_{УПЧ}$ должна быть равна $kmn$. Прибавляя затем $f_{кв}$, получим

$$\frac{f_0 - kmnf_{кв}}{kmn} + f_{кв} = \frac{f_0}{kmn}. \tag{9}$$

При соответствующем выборе $n$ получаем стабильную частоту в метровом диапазоне волн. Теперь ясно, почему в (1) взят знак минус и в (3) $f_2 - mf_1 = mf_{кв}$. Именно такой выбор соотношений частот обеспечил получение сигнала в схеме фазовой автоподстройки, равного $kmnf_{кв}$, что в свою очередь дает возможность обойтись в схеме эталона одним делителем частоты с последовательными кратностями деления в $k$, $m$ и $n$ раз. Кроме того, дополнительным удобством, вытекающим из соотношений (2) и (3), является различие промежуточных частот и, соответственно, опорных сигналов в схеме фазовой автоподстройки $f_1$ по $f_{кв}$, и в схеме фазовой автоподстройки $f_2$ по $f_1$, что уменьшает влияние паразитных связей в схеме. Для экономии ламп и некоторой компенсации фазовых дрейфов умножителя частоты генератора с кварцем желательно, чтобы кратность умножения первых каскадов умножителя равнялась $m$. Тогда от точки умножителя, где имеется сигнал частоты $mf_{кв}$, можно сделать отвод на фазовый детектор схемы фазовой автоподстройки $f_2$ по $f_1$; в противном случае, частоту $mf_{кв}$ пришлось бы формировать специально.

Выясним теперь, какие требования предъявляются к вычитающим блокам. Для простоты оценок будем считать достаточной фильтрацию боковых частот по уровню 0,7. На вычитающее устройство (пусть это будет обычный смеситель) подаются сигнал от делителя с частотой, равной $f_{\text{УПЧ}}/m_1$, где $m_1$ — кратность деления, и сигнал опорного генератора с частотой $f_{\text{кв}}$. Расстояние между боковыми частотами равно $2f_{\text{УПЧ}}/m_1$, т. е. добротность фильтра для ослабления боковых частот по уровню 0,7 равна

$$Q = \frac{m_1 f_{\text{кв}}}{2f_{\text{УПЧ}}}. \tag{10}$$

Отсюда видно, что для облегчения фильтрации следует уменьшать кратность деления, предшествующую вычитанию, и увеличивать $f_{\text{УПЧ}}$.

Формулу (10) можно переписать иначе, если учесть, что $m_1 f_{\text{кв}} = f_0 - f_{\text{УПЧ}}$ и $f_{\text{УПЧ}} \ll f_0$, где $f_0$ — частота молекулярного генератора,

$$Q = \frac{f_0 - f_{\text{УПЧ}}}{2f_{\text{УПЧ}}} \simeq \frac{f_0}{2f_{\text{УПЧ}}}. \tag{11}$$

Следовательно, при обычном вычитании нужная добротность фильтра не зависит от диапазона волн, на котором производится вычитание; оценим эту добротность (11), принимая $f_{\text{УПЧ}} = 50$ *Мгц*:

$$Q = \frac{2{,}4 \cdot 10^4}{10^2} = 240,$$

т. е. в диапазоне сантиметровых волн, где имеются объемные резонаторы с добротностью $(3 \div 5) \cdot 10^4$, можно получить ослабление боковых частот в $10^2 \div 10^3$ раз. Добротность резонаторов в диапазоне дециметровых волн меньше, поэтому там при фильтрации одним контуром можно получить ослабление боковых частот только в 10÷100 раз. Что касается диапазона метровых волн, то на нем обеспечить нужную фильтрацию одиночным контуром затруднительно, но эту трудность можно обойти применением простейшей схемы фазовой автоподстройки. Кроме того, в начале 1958 г. С. П. Дубоносов предложил производить вычитание ошибки опорного генератора последовательно в два приема, т. е. фактически резко снизить величину $m_1$ в (10). Такой метод дает возможность осуществлять удовлетворительную фильтрацию боковых частот в любом диапазоне волн. Выше, при рассмотрении вычитания ошибки на частоте $f_1$ двойное вычитание получилось автоматически, иначе не удалось бы получить стабильную частоту $f_0/km$. Одновременно таким путем облегчается и фильтрация в этом диапазоне (см. (8) и (7)).

Необходимо отметить, что иногда двукратное вычитание ошибки может оказаться недостаточным. В таких случаях следует перейти к более высокой кратности вычитаний. С связи с этим рассмотрим последовательно вычитание ошибки опорного генератора с разными кратностями вплоть до общего случая $k$-кратного вычитания.

Прежде всего установим связь между кратностью умножения $l$ ($l = kmn$) в уравнении (5) частоты опорного генератора с кварцем до частоты молекулярного генератора и кратностями деления $m_k$ для разных кратностей вычитания ошибки; при этом учитываем, что $f_{\text{УПЧ}} = f_0 - lf_{\text{кв}}$.

1) Однократное вычитание:

$$\frac{f_0 - lf_{\text{кв}}}{m_1} + f_{\text{кв}} = \frac{f_0}{m_1},$$

если $l = m_1$.

2) Двукратное вычитание:

$$\frac{f_0 - lf_{\text{кв}}}{m_1 m_2} + \frac{f_{\text{кв}}}{m_2} + f_{\text{кв}} = \frac{f_0}{m_2 m_1}$$

если $l = m_1\ (1 + m_2)$.

3) Трехкратное вычитание:

$$\frac{f_0 - lf_{кв}}{m_1m_2m_3} + \frac{f_{кв}}{m_2m_3} + \frac{f_{кв}}{m_3} + f_{кв} = \frac{f_0}{m_1m_2m_3},$$

если $l = m_1\,(1 + m_2 + m_2m_3)$.

4) $k$-кратное вычитание:

$$\frac{f_0 - lf_{кв}}{m_1m_2 \ldots m_k} + \frac{f_{кв}}{m_km_{k-1} \ldots m_2} + \ldots + \frac{f_{кв}}{m_k} + f_{кв} = \frac{f_0}{m_1m_2 \ldots m_k},$$

если $l = m_1\,(1 + m_2 + m_2m_3 + m_2 \ldots m_k)$,
т. е. в общем случае

$$l = m_1(1 + m_2 + m_2m_3 + \ldots + m_2m_3 \ldots m_k) \qquad (12)$$

или при $m \simeq 10$

$$l \simeq m_1m_2 \ldots m_k. \qquad (12а)$$

Теперь рассмотрим, какие требования налагаются на добротности фильтров вычитающих блоков в зависимости от кратности вычитания. Как и ранее, для простоты оценок считаем достаточным разделение боковых частот по уровню 0,7.

1) Однократное вычитание.

Полученную выше формулу (10) запишем иначе, считая $f_{УПЧ} = pf_{кв}$, где $p$ — некоторый коэффициент

$$Q_1 = \frac{m_1f_{кв}}{2f_{УПЧ}} = \frac{m_1f_{кв}}{2pf_{кв}} = \frac{m_1}{2p} \simeq \frac{m_1}{2}.$$

2) Двукратное вычитание:

$$Q_2 = \frac{m_2f_{кв}}{2\left(\frac{f_{УПЧ}}{m_1} + f_{кв}\right)} = \frac{m_1m_2f_{кв}}{2f_{кв}(p + m_1)} \simeq \frac{m_2}{2}.$$

3) Трехкратное вычитание:

$$Q_3 = \frac{m_3f_{кв}}{2\left(\frac{f_{УПЧ}}{m_1m_2} + \frac{f_{кв}}{m_2} + f_{кв}\right)} = \frac{m_1m_2m_3f_{кв}}{2f_{кв}(p + m_1 + m_1m_2)} \simeq \frac{m_3}{2}.$$

4) $k$-кратное вычитание:

$$Q_k = \frac{m_kf_{кв}}{2\left(\frac{f_{УПЧ}}{m_1m_2 \ldots m_k} + \frac{f_{кв}}{m_2 \ldots m_k} + \ldots + f_{кв}\right)} =$$

$$= \frac{m_1m_2 \ldots m_kf_{кв}}{2\,(p + m_1 + \ldots + m_1m_2 \ldots m_{k-1})\,f_{кв}} \simeq \frac{m_k}{2}. \qquad (13)$$

При допущенных выше упрощениях предполагалось, что $p \simeq 1$ и все $m \simeq 10$. При необходимости можно пользоваться точной формулой (13) (до знака $\simeq$), особенно в тех случаях, когда $f_{УПЧ}$ и $f_{кв}$ резко отличаются друг от друга по величине, т. е. $p \gg 1$ или $p \ll 1$ и его надо учитывать.

При конкретных расчетах любой схемы стандарта частоты, основанной на принципе вычитания ошибки опорного генератора, следует задавать две исходные величины: 1) уровень боковых частот в выходном сигнале, что дает возможность определить $Q_k$ и далее $m_k$ из (13); 2) частоту выходного сигнала, зная которую можно приблизительно определить величину $l$.

Далее, зная $l$ и $m_k$ и полагая в (12а) $m_1 = m_2 = \ldots = m_k$, найдем необходимую кратность вычитания ошибки по формуле

$$l \simeq m^k. \qquad (12б)$$

После этого следует уточнить $l$ и все $m_k$ по (12) и величину $f_{кв}$ по формуле $f_{упч} = f_0 - lf_{кв}$.

## СХЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ И ФАЗЫ СТАНДАРТНОГО СИГНАЛА

Обычным способом исследования стандартов частоты является сравнение нескольких одинаковых схем между собой (так называемое внутреннее сравнение).

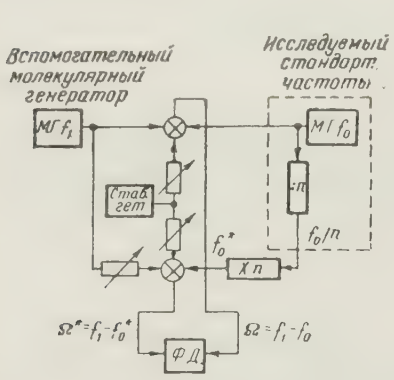



Рис. 4

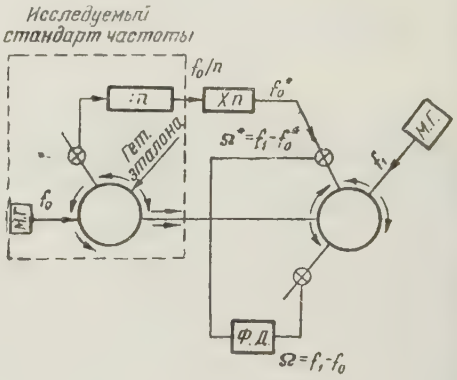



Рис. 5

Ниже рассмотрена схема сравнения выходного сигнала частоты с вспомогательным молекулярным генератором.

Исследуемая схема вырабатывает стандартный сигнал с частотой $f_0\, n = f_c$. Для изучения этого сигнала проще всего, умножив его в $n$ раз, сравнить его $n$-ю гармонику $f_c n = f_0^*$ с сигналом второго молекулярного генератора $f_1$. При этом получится разностная частота

$$\Omega^* = f_1 - f_0^*.$$

В $\Omega^*$, как и в $f_0$, входят фазовые погрешности схемы стандарта частоты и, кроме того, фазовые погрешности, вносимые вспомогательным умножителем частоты.

Для измерения стабильности частоты выходного сигнала исследуемого стандарта достаточно сравнить $\Omega^*$ с частотой вспомогательного низкочастотного генератора. Чтобы оценить стабильность с погрешностью порядка $10^{-10}$, вспомогательный генератор может иметь погрешность порядка $10^{-2} - 10^{-3}$.

Для оценки флуктуаций фазы в $f_0^*$ надо непосредственно смешать, кроме того, сигналы обоих молекулярных генераторов; при этом получим $\Omega = f_1 - f_0$.

Подавая $\Omega^*$ и $\Omega$ на фазовый детектор, можно измерить фазовые флуктуации схемы стандарта частоты.

Блок-схема, построенная в соответствии с высказанными выше соображениями, показана на рис. 4. Вспомогательный гетеродин должен быть достаточно стабильным, желательно иметь фазовую автоподстройку по кварцу. В противном случае возможна дополнительная фазовая модуляция $\Omega^*$ и $\Omega$.

Как видно из рис. 3, в состав схемы стандарта частоты входит гетеродинный клистрон, стабилизованный по кварцу с точностью до фазы. Если

мощность этого гетеродина на волне 1,25 *см* достаточно велика, то его можно одновременно использовать и в схеме измерения стабильности частоты стандарта. Задача еще более упрощается, если отказаться от балансного приема сигнала молекулярного генератора. Проигрыш в чувствительности приемника при этом практически оказывается небольшим.

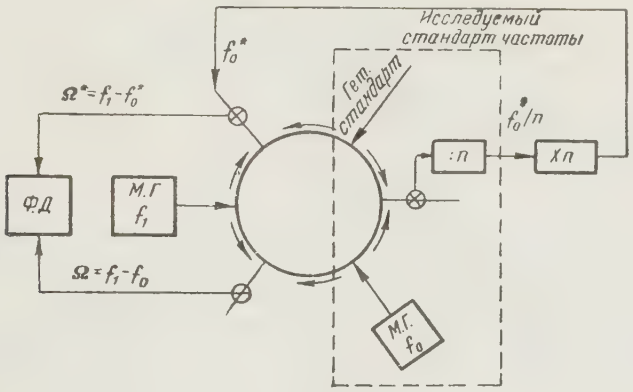



**Рис. 6**

Два варианта схем с использованием гетеродина стандарта частоты и небалансных смесителей показаны на рис. 5 и 6. В схеме рис. 5 используются два гибридных кольца обычной конструкции; в схеме рис. 4 — одно гибридное кольцо, имеющее шесть входов вместо обычных четырех.

Для измерения стабильности фазы стандартного сигнала, кроме описанной выше схемы, разработана схема, вообще не нуждающаяся в молекулярном генераторе. Блок-схема ее показана на рис. 7. Частота вспомогательного генератора с кварцем, равная частоте $f_0/n$ выходного сигнала стандарта частоты с вычитанием ошибки, умножается в $n$ раз и подается на его вход в качестве имитатора молекулярного генератора. Выходная частота стандарта в точности равна частоте вспомогательного кварцевого генератора. Подавая эти две частоты на фазовый детектор, можно измерить стабильность фазы стандартного сигнала. Требования к стабильности генератора с кварцем ($\sim 10^{-7}$) определяются полосой УПЧ с учетом коэффициента умножения частоты кварца. Имитатор молекулярного генератора, кроме того, очень удобен для предварительной наладки схемы стандарта частоты.

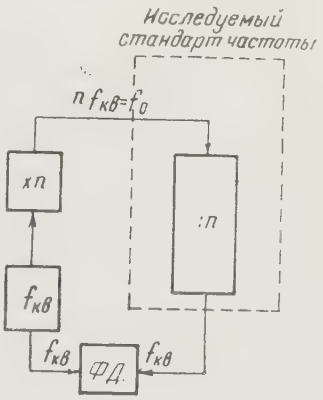



Рис. 7

При помощи описанной выше схемы (рис. 7) было проведено исследование макета стандарта частоты с вычитанием ошибки, обеспечивающего получение стабильной частоты в диапазоне метровых волн. Как и следовало ожидать, преобразованный сигнал стандарта сохранял стабильность частоты сигнала молекулярного генератора.

Хаотическая фазовая модуляция сигнала, измеренная по схеме рис. 7, оказалась порядка угловой минуты.

Схема стандарта частоты испытывалась в комплексе с автономным молекулярным генератором с угольным сорбционным насосом. Время непрерывной работы генератора свыше 40 *час*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, Приборы и техника эксперимента, 1957, 1, 1—7.
2. T. P. Gordon, H. Z. Leiger, C. H. Townes, Phys. Rev., 1954, 95, 282.
3. А. Я. Лейкин, Докл. на научной сессии об-ва им. А. С. Попова, май 1957 г., Измерительная техника, 1959, 7, 41.
4. Н. Г. Басов, И. Д. Мурин, А. Н. Петров, А. М. Прохоров, Н. В. Штраних, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, 2, 3, 50.
5. И. Д. Мурин, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1957, 1, 5, 555.
6. Г. А. Васнева, Б. А. Гайгеров, В. В. Григорьянц, Г. А. Елкин, М. Е. Жаботинский, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 10, 1300.
7. E. T. Davis, Phase Stabilization to microwave frequency standarts, Докл. на конференции WESCON, август, 1957.
8. И. Л. Берштейн, Докл. на конференции по статистической физике, г. Горький, октябрь, 1958.
9. Г. А. Васнева, В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, О схемах молекулярных часов, Докл. на 2-й Всесоюзной конференции МВО СССР по радиоэлектронике, Саратов, сентябрь, 1957.
10. И. Л. Берштейн, Докл. на научной сессии об-ва им. А. С. Попова, май, 1957, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 2, 288; И. Л. Берштейн, В. Л. Сибиряков, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 2, 290.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
1 III 1960

# *КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ*

## ШИРОКОПОЛОСНОЕ УСИЛЕНИЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЧАСТОТЫ

*Л. К. Михайловский*

Экспериментально обнаруженное автором взаимодействие двух сверхвысокочастотных сигналов на нелинейном элементе, имеющее место при произвольном соотношении между частотами этих сигналов*, позволило предложить создание широкополосных усилителей СВЧ-сигналов, основанных на принципиально новом способе усиления [1]. Этот способ основан на управлении усиливаемым сигналом параметрами нелинейного элемента**, которые в свою очередь вызывают изменение величины комплексного коэффициента отражения от данного элемента для вспомогательного (питающего) сигнала. При этом, как показано теоретически и экспериментально, можно получить усиление огибающей СВЧ-сигналов, происходящее с преобразованием их несущей частоты***.

Сущность предложенного способа усиления заключается в следующем. Пусть на некоторый нелинейный элемент одновременно подаются два СВЧ-сигнала: один управляющий сигнал с огибающей, подлежащей усилению, и второй — непрерывный (или импульсный) сигнал от вспомогательного генератора.

Пусть первый сигнал имеет несущую частоту $f_c$ и среднюю (импульсную) мощность $P_c$, а второй, соответственно, частоту $f_г$ и мощность $P_г$. Усиливаемый сигнал, воздействуя на нелинейный элемент, например кристаллический детектор в детекторной головке или намагниченный феррит в волноводе, вызывает соответствующее изменение емкости и сопротивления кристаллического детектора и появление прецессии магнитных моментов спинов электронов в феррите. Таким образом, управляющий сигнал прежде всего как бы детектируется самим веществом нелинейного элемента, а потом уже, как следствие, вызывает изменение внешних электромагнитных параметров этого нелинейного элемента для вспомогательного сигнала. Изменение внутренних микропараметров происходит в соответствии с законом изменения огибающей управляющего сигнала, но с определенным временем релаксации, что, совместно с величиной добротности внутреннего контура нелинейного элемента, определяет величину искажения формы огибающей после «пересадки» ее на новую несущую.

Вспомогательный сигнал, конечно, вызывает также соответствующие изменения параметров нелинейного элемента и поэтому он за время действия первого сигнала должен обладать неизменной мощностью ($P_{г\,пад}$=const или $P_{г\,имп\,пад}$=const). Отсюда же следует, что режим работы нелинейного элемента нужно выбирать так, чтобы при изменении величины, отраженной от нелинейного элемента мощности вспомогательного сигнала, параметры этого нелинейного элемента почти не менялись.

В результате рассмотренного выше процесса оказывается, что после прихода на нелинейный элемент управляющего сигнала на отраженной или прошедшей сквозь этот элемент части вспомогательного сигнала появятся амплитудная и фазовая модуляции, соответствующие огибающей усиливаемого сигнала.

Математически этот процесс можно описать следующим образом. Пусть при $P_c = 0$ величина мощности вспомогательного сигнала, отраженного от нелинейного элемента, равна $\rho_1(f_г P_г) P_г$, а при $P_c \neq 0$ она равна $\rho_2(f_c f_г P_c P_г) P_г$, где $\rho_1$ и $\rho_2$ — соответствующие модули комплексных коэффициентов отражения для вспомогательного сигнала, зависящие как от величин частот $f_c$ и $f_г$, так и от величин мощностей $P_c$ и $P_г\left(\rho = \left(\frac{\text{КСВ} - 1}{\text{КСВ} + 1}\right)^2\right)$. Далее очевидно, что разность

$$\rho_1 P_г - \rho_2 P_г = \Delta\rho P_г = \Delta P_г \qquad (1)$$

---

* Этот эффект, обнаруженный на СВЧ в искусственной среде — твердом теле —, вероятно имеет много общего с Люксембург — Горьковским эффектом, наблюдавшимся на более длинных волнах в естественной среде — ионосфере.

** Под нелинейным элементом понимается любое устройство или вещество, изменяющее свои электромагнитные параметры под действием электромагнитных волн.

*** Здесь и далее имеется в виду усиление сигнала по мощности, так как усиление по напряжению (или току) в технике СВЧ не имеет смысла.

будет определять величину изменения мощности вспомогательного сигнала, отраженной от нелинейного элемента, из-за действия усиливаемого сигнала на этот элемент. Коэффициент усиления в этом случае будет равняться

$$k = \frac{\Delta P_{\text{г}}\,(f_{\text{с}} f_{\text{г}} P_{\text{с}} P_{\text{г}})}{P_{\text{с}}} = \Delta\rho\,\frac{P_{\text{г}}}{P_{\text{с}}}\,. \qquad (2)$$

Если нелинейный элемент допускает подачу на него такой большой мощности $P_{\text{г}}$, при которой даже при весьма малой величине $\Delta\rho$ оказывается, что $\Delta\rho P_{\text{г}} > P_{\text{с}}$, то произойдет усиление огибающей сигнала частоты $f_{\text{с}}$ с преобразованием его несущей в частоту $f_{\text{г}}$.

Совершенно очевидно, что при воздействии на нелинейный элемент сигнала с мощностью $P_{\text{г}}$ (при $P_{\text{с}} = 0$) в отраженном от этого элемента сигнале будут составляющие с частотами $kf_{\text{г}}$, где $k = 1, 2, 3$ и т. д. Если, кроме того, на этот же элемент будет воздействовать и сигнал с мощностью $P_{\text{с}}$, то в отраженном от него сигнале появятся комбинационные частоты и на их создание будет тратиться часть мощности $\Delta P_{\text{г}}$ (при $\rho_2 < \rho_1$). Остальная часть $\Delta P_{\text{г}}$ пойдет на увеличение потерь в нелинейном элементе и на возможное создание колебаний тех частот, для которых элемент под воздействием сигнала $P_{\text{с}}$ станет отрицательным сопротивлением, по модулю равным или бо́льшим волнового сопротивления волновода. В случае, если мощность этих колебаний будет превосходить величину $P_{\text{с}}$, то возникнет также эффект усиления огибающей сигнала с преобразованием его несущей частоты.

При $\rho_2 > \rho_1$ приращение мощности $\Delta P_{\text{г}}$, а также комбинационные частоты и частоты эффекта отрицательного сопротивления, очевидно, могут возникать только за счет уменьшения мощности потерь вспомогательного сигнала в нелинейном элементе и за счет уменьшения мощности его гармоник $kf_{\text{г}}$ (помимо мощности $P_{\text{с}}$).

Описанный выше метод усиления основан на изменении величины модуля соответствующего коэффициента отражения. Очевидно, в принципе с равным успехом можно использовать и изменение фазы коэффициента отражения и изменение под действием управляющего сигнала соответствующего коэффициента передачи. В последнем случае нелинейный элемент будет четырехполюсником [2].

Для увеличения $k$ нелинейные элементы, подобные описанным выше, можно включать параллельно или последовательно, а для повышения помехозащищенности вспомогательный генератор следует запускать в импульсном режиме с автослежением за усиливаемым сигналом.

Диапазоны частот сигналов, взаимодействующих описанным выше способом, определяются свойствами нелинейного элемента, и в принципе могут лежать в любой части электромагнитного спектра.

В качестве примера укажем, что получившие в последнее время распространение электрически- и магнитно-управляемые СВЧ-ослабители и фазовращатели по сути дела используют эффект изменения параметров вещества нелинейного элемента под действием огибающей управляющего сигнала при частоте этого сигнала $f_{\text{с}} = 0$ и частоте управляемого сигнала $f_{\text{г}}$, лежащей в области сантиметровых волн *. Если же рассмотреть другой крайний случай при $f_{\text{г}} = 0$, когда на нелинейный элемент вместо питающего СВЧ-сигнала подан питающий сигнал в виде постоянного напряжения и, может быть, постоянного магнитного поля, то в принципе тоже получится усиление, если при этих условиях и соответствующей настройке будет обеспечено отрицательное входное сопротивление нелинейного элемента, другими словами, для усиливаемого сигнала будет обеспечен коэффициент отражения, больший единицы. При этом усиление произойдет без изменения несущей частоты. И чем ближе будет модуль величины входного отрицательного сопротивления к величине волнового сопротивления волновода, тем больше окажется коэффициент усиления. В предельном случае, т. е. при их равенстве, наступит генерация.

Экспериментальное осуществление перекрестной модуляции двух СВЧ-сигналов при помощи нелинейного элемента было произведено в условиях, когда частоты обоих сигналов лежали как в сантиметровом**, так и в миллиметровом диапазонах волн, а также и при сигнале частоты $f_{\text{с}}$ в миллиметровом и сигнале частоты $f_{\text{г}}$ в сантиметровом диапазонах волн.

Во всех перечисленных случаях можно было установить явление перекрестной модуляции с усилением, наблюдаемым по экрану осциллографа. Также осуществлен эк-

---

* О возможности создания не механически-, а электрически-управляемых резонаторов автор доложил в 1953—1954 гг. на семинаре в МГУ, руководимом С. Д. Гвоздовером.

** При этом экспериментально был установлен совершенно подобный эффект перекрестной модуляции и при индикации диапазона второй гармоники отраженного вспомогательного сигнала.

перимент с целью измерения величины $k$ при нахождении обоих взаимодействующих сигналов в диапазоне сантиметровых волн. Измерения проводились при помощи термисторного измерителя мощности. Величина $k$ при использовании одного нелинейного элемента при определенных условиях составляла примерно 40.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Б. П. Поллаку и В. Ф. Балакову за участие в проведении экспериментов на миллиметровых волнах и А. В. Зайцеву за участие в последнем из упомянутых экспериментов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Михайловский, Авторск. заявка от 3 V 1957 г. за № 572528 в Комитет по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР, Авторск. свидетельство № 114707 класс 21g 13/17.
2. Л. К. Михайловский, Перекрестная модуляция на феррите, Тр. III совещания по физике ферритов, Минск, июнь 1959 г. (см. книгу «Ферриты», Изд. АН БССР, Минск, 1960 г.).

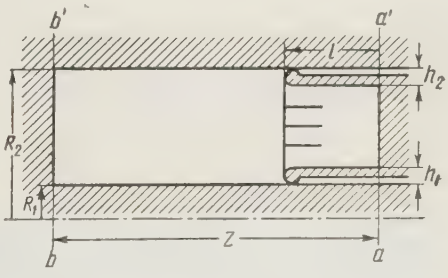
Поступило в редакцию
12 VII 1960

---

# ПОДАВЛЕНИЕ ГАРМОНИК В КОАКСИАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

***А. И. Елькинд***

Для резонаторов, фильтров с прямоволновой настройкой в диапазоне СВЧ применяют коаксиальные контуры, имеющие близкую к линейной зависимость резонансной длины волны $\lambda_1$ от переменной длины резонатора $Z$. Резонатор идеальной формы, образованной пересечением коаксиала двумя плоскостями, имеет абсолютно линейную зависимость, но обычно не используется из-за кратности собственных частот. При настройке такого резонатора на основную частоту возбуждающего сигнала возможен резонанс гармоник, недопустимый в большинстве случаев применения. В практических конструкциях резонаторов устранение кратности и, следовательно, исключение резонанса гармоник связано с тем или иным отклонением от идеальной формы. Подобное отклонение вызывает нелинейность зависимости $\lambda_1 = \lambda_1(Z)$ и с этой точки зрения оно должно быть минимальным. Интересно поэтому определить минимальные геометрические размеры отклонения, исключающего резонанс гармоник в резонаторе, настроенном на основную частоту сигнала.




Поскольку собственные функции и частоты для коаксиального резонатора идеальной формы известны, наиболее просто такая задача решается методом возмущений [1]. Ниже приведен пример расчета для показанного на рисунке распространенного типа резонатора с подвижным контактным короткозамыкателем. Отклонение вносит форма короткозамыкателя. Обычно размер $h$ мал по сравнению с $R$, что позволяет рассматривать резонатор при значительной величине $l$ как слабо деформированный относительно резонатора идеальной формы, ограниченного плоскостями $aa'$ и $bb'$. Спектр собственных частот резонатора длины $Z$.

$$\omega_n = \omega_{n0} + \delta\omega_n, \tag{1}$$

где

$$\omega_{n0} = n\omega_{10} = n\pi c / Z \tag{2}$$

— спектр недеформированного резонатора;

$$\delta\omega_n = \omega_{n0} \frac{\int_{\delta v} (|H_n|^2 - |E_n|^2)\, dv}{2\int_v |H_n|^2\, dv} = \frac{\omega_{n0}}{2n\pi} f(R, h) \sin\frac{2n\pi}{Z} l; \tag{3}$$

$$H_n = H_0 \frac{R_1}{r} \cos n\pi z / Z; \quad E_n = iE_0 \frac{R_1}{r} \sin n\pi z / Z$$

— собственные функции недеформированного резонатора ($E_0 = H_0$). Интегрирование в числителе производится по объему деформации: по $\varphi$ от 0 до $2\pi$; по $z$ от 0 до $l$; по $r$ от $R_1$ до $R_1 + h_1$ и от $R_2 - h_2$ до $R_2$, причем ввиду малости $h$ используется $E(r) \simeq E_0$ и $E(r) = E_0 R_1 / R_2$. Интегрирование в знаменателе — по всему объему;

$$f(R, h) = \left(\frac{h_1}{R_1} + \frac{h_2}{R_2}\right) \ln^{-1} \frac{R_2}{R_1}; \quad \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{W}{60},$$

где $W$ — характеристическое сопротивление коаксиала в омах.

При работе резонатора основная частота сигнала совпадает с первой собственной частотой $\omega_1$. Для частоты $n$-й гармоники сигнала $n\omega_1$ имеет место расстройка относительно ближайшей собственной частоты $\omega_n$. Из (1) — (3) следует

$$n\omega_1 - \omega_n = n\delta\omega_1 - \delta\omega_n = (\omega_{n0} / 2\pi) f(R, h) \left(\sin 2\pi l / Z - \frac{1}{n} \sin 2n\pi l / Z\right). \qquad (4)$$

Уравнение $n \sin x - \sin nx = 0$, где $x = 2\pi l / Z$ не имеет корней в интервале $0 < x < \pi$. Это означает, что для всех гармоник расстройка отлична от нуля при длине резонатора $Z > 2l$. При $Z = 2l$ резонанс гармоник возможен, но этот случай далек от практики применения резонаторов. Для полного исключения (подавления) гармоник расстройка должна выходить за пределы полуширины резонансной кривой $\omega_n / 2Q_n$. В резонаторе, настроенном на основную частоту сигнала, гармоника может резонировать только как высший тип ($n$ полуволн по $z$). В этом случае добротность для гармоники выше, чем для основной частоты, и она растет с номером $n$. $Q_n \simeq \sqrt{n} Q_1$ [1].

Из (4) следует, что расстройка также растет с номером гармоники. Следовательно, достаточно определить условие для подавления низшей, второй гармоники. Минимальная расстройка, обеспечивающая практически полное подавление второй гармоники, оценивается величиной

$$2\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 / Q_1. \qquad (5)$$

Такая расстройка в 2—3 раза превосходит полуширину резонансной кривой $\omega_2 / 2Q_2$ ($Q_2 \simeq 1{,}4\ Q_1$). Размеры $l$, $h$, которые дают расстройку, соответствующую (5) или бо́льшую, должны удовлетворять условию

$$\left(\frac{h_1}{R_1} + \frac{h_2}{R_2}\right)\left(\frac{l}{Z}\right)^3 \geqslant \frac{W}{120\pi^2 Q_1}, \qquad (6)$$

которое получено подстановкой (4) в (5) и разложением (4) в ряд по $l/Z$ до третьего порядка; $l$, $h$, удовлетворяющее (6), являются минимальными размерами, обеспечивающими подавление второй, а следовательно, и любой высшей гармоники. При $W = 50$ *ом*, $Q_1 = 10^3$, $h/R = 0{,}1$ условие (6) удовлетворяется при $l/Z \geqslant 0{,}04$. При меньших $l/Z$ или $h/R$ подавление гармоник не обеспечено. Поскольку форма короткозамыкателя обычно не выбирается с целью подавления гармоник, второму окончанию резонатора со стороны $bb'$ целесообразно специально придавать ступенчатую форму, размеры которой $l$, $h$ рассчитываются по (6).

Закон настройки с учетом нелинейности $\lambda_1 = \lambda_1(Z)$ для рассмотренного резонатора непосредственно получается из (1), (2) и (3), где $n = 1$, $\lambda_1 = 2\pi c / \omega_1$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, Изд. Советское радио, 1952, стр. 94—97, 107.

Поступило в редакцию
28 IV 1960

# К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЖЕКТОРОВ ЛЕНТОЧНОГО ПОТОКА

***Л. Э. Бахрах, А. Д. Сулимин***

## 1. ФОРМА ЭЛЕКТРОДОВ

Будем исходить из части цилиндрического диода, в которой в качестве катода используется часть внутренней стороны внешнего цилиндра, связанная с сектором угла $2\Theta$ (рис. 1). В цилиндрическом диоде с током, ограниченным пространственным зарядом, ход потенциала $U(r)$ можно представить в виде

$$U(r) = \left[ \frac{\frac{r}{r_к}\beta^2\left(\frac{r}{r_к}\right)}{\frac{r_a}{r_к}\beta_a^2\left(\frac{r_a}{r_к}\right)} \right]^{2/3} U_a, \qquad (1)$$

где $r_a$ и $r_к$ — соответственно радиусы анода и катода; $r$ — расстояние от начала полярных координат до рассматриваемой точки межэлектродного пространства; $U_a$ — потенциал анода; $\beta$ — функция отношения $r/r_к$, определяемая выражением

$$\beta = \gamma - \frac{2}{5}\gamma^2 + \frac{11}{120}\gamma^3 - \frac{47}{3300}\gamma^4 + \cdots;$$

$$\gamma = \ln\frac{r}{r_к}.$$

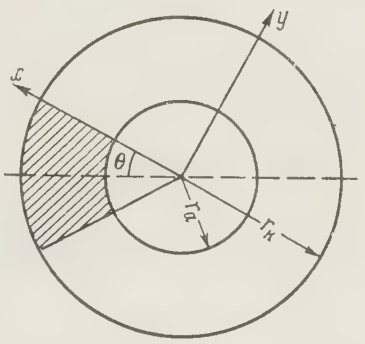



Рис. 1

Для того чтобы сохранить прямолинейное движение электронов в вырезанном секторе (при условии, что внутри этого сектора имеет место уравнение Пуассона, а вне его — уравнение Лапласа), необходимо расположить вне сектора электроды такой формы, чтобы на границе пучка выполнялись условия:

$$U_{y=0} = U_0(x), \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \qquad (2)$$

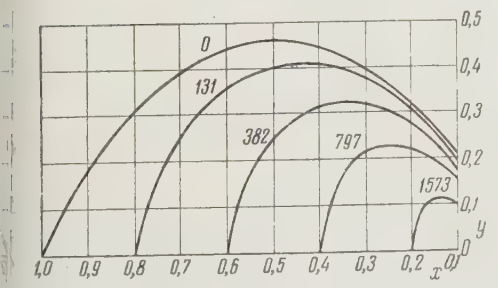



Рис. 2

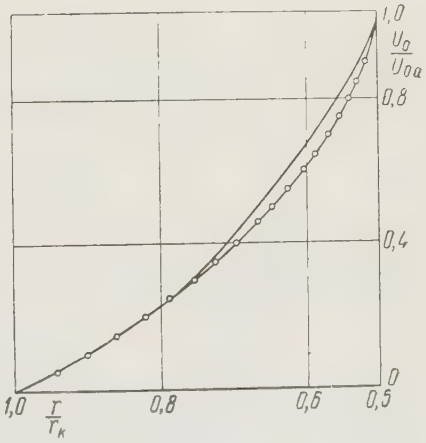



Рис. 3

(т. е. при $y = 0$ в системе координат $x$, $y$ (рис. 1)), где $U_0(x)$ — распределение потенциала, соответствующее (1).

Будем искать решение уравнения Лапласа в виде ряда

$$U = \sum_0^\infty U_n(x)\, y^n. \qquad (3)$$

На основании граничных условий (2) имеем

$$U(x, 0) = U_0(x), \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = U_1 = 0. \qquad (4)$$

Для нахождения других коэффициентов ряда подставим (3) в уравнение Лапласа, откуда получаем рекуррентную формулу

$$U_{n+2}(x) = -\frac{U''_n(x)}{(n+2)(n+1)},$$

при помощи которой вместе с (4) все коэффициенты ряда можно выразить через функцию $U_0(x)$ и ее производные.

Вычисленные таким образом коэффициенты позволяют определить $U(x, y)$, а следовательно, и искомую форму электродов. Результат подобных вычислений при ограничении тремя членами разложения представлен на рис. 2. Найденная таким образом форма электродов несколько отличается как от формы электродов, определенной Пирсом [1], так и от рассчитанной Радлеем [2]. На рис. 3 представлен измеренный в электролитической ванне ход потенциала вдоль границы потока при рассчитанной выше форме электродов. Можно видеть, что полученное распределение потенциала удовлетворительно согласуется с теоретическим (сплошная кривая), соответствующим (1).

## 2. ВЛИЯНИЕ АНОДНОГО ОТВЕРСТИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ФОРМУ ПОТОКА В ЗААНОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что ток, ограниченный пространственным зарядом, в цилиндрическом диоде длины $l$ определяется выражением

$$I'_a = \frac{14{,}64 \cdot 10^{-6} U_a^{3/2}}{r_a^2 \beta_a^2 \left(\frac{r_a}{r_к}\right)},$$

где $I'_a = I_a / l$ — ток на единицу длины по оси цилиндра в амперах на метр; $r_a$ — радиус анода в метрах; $U_a$ — анодное напряжение в вольтах. Следовательно, первеанс такого цилиндрического прожектора с углом сходимости $2\Theta$ ($\Theta$ в градусах) будет

$$P = \frac{I'_a}{U_a^{3/2}} = \frac{14{,}64 \cdot 10^{-6}}{r_a \beta_a^2} \left(\frac{2\Theta}{360}\right). \quad (5)$$

Диафрагму с отверстием можно рассматривать как рассеивающую электронную линзу, фокусное расстояние которой определяется из соотношения

$$f = -\frac{2U_a}{E_a},$$

где $E_a$ — напряженность электрического поля у анода, определяемая (1).

Применяя формулу линзы

$$\frac{1}{r_a} - \frac{1}{s_0} = \frac{1}{f}, \quad (6)$$

где $s_0$ — расстояние от плоскости линзы до точки, в которой сошлись бы продолжения траекторий электронов в отсутствие расталкивающего действия сил пространственного заряда, можно прийти к заключению [4], что линзовое действие анодного отверстия собирательно только для значений $r_a / r_к < 0{,}53$.

Для выяснения поведения потока электронов в заанодном пространстве под действием пространственного заряда воспользуемся уравнением движения крайнего электрона, которое для значения полутолщины «талии» потока $y_m$ и для величины расстояния талии потока от анодного отверстия $z_m$ дает [3]

$$y_m = y_0 \left(1 - \frac{y_0}{4Ks_0^2}\right), \quad (7)$$

$$z_m = \frac{y_0}{2Ks_0}, \quad (8)$$

где $K = \frac{I'}{U_a^{3/2}} 2{,}4 \cdot 10^4$; $y_0$ — полутолщина потока в анодном отверстии. При $K \leqslant y_0 / 4s_0^2$ происходит пересечение электронов потока со средней плоскостью, т. е. талия не образуется и, следовательно, нельзя получить параллельный поток элек-

тронов по выходе их из прожектора. Таким образом, выражение

$$K \geqslant \frac{y_0}{4s_0^2} \qquad (9)$$

представляет собой условие наличия талии у выходящего из прожектора потока электронов. Легко видеть, что это соотношение связывает между собой величины $U_a$, $\Theta$, $r_a / r_к$ и $P$.

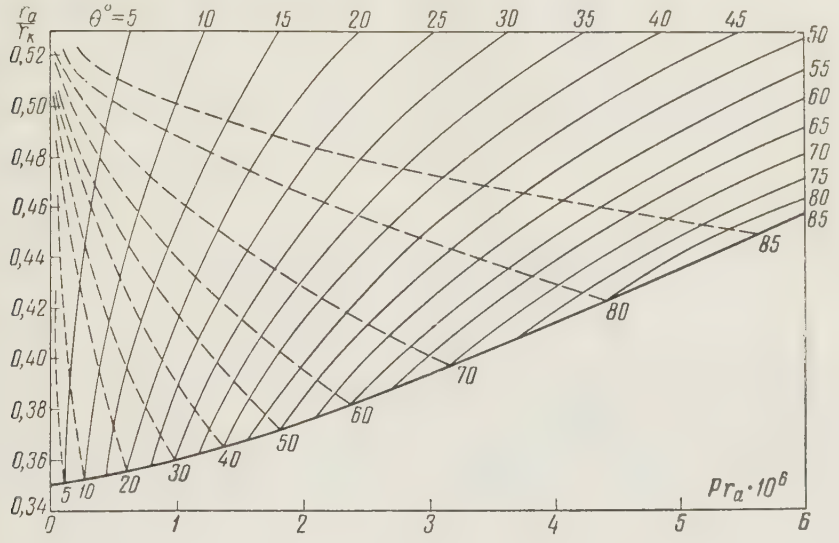



Рис. 4

На рис. 4 сплошными кривыми изображена зависимость $Pr_a$ от $r_a / r_к$ при различных значениях $\Theta$ в качестве параметра, согласно соотношению (5). Пунктирными кривыми изображена зависимость между теми же величинами по (9), в котором полагается $y_0 = r_a \operatorname{tg} \Theta$. Пересечение этих кривых при одинаковых значениях $\Theta$ дает систему точек, лежащих на границе области существования талии потока. Кривая, соединяющая эти точки, является нижней границей области значений $r_a / r_к$, $Pr_a$ и $\Theta$, где возможно получение потока с талией. Верхняя граница этой области определяется значением $r_a / r_к = 0{,}53$.

На рис. 5 на основании уравнений (5), (6), (7) и (8) представлены значения $y_m$ и $z_m$ в зависимости от $\Theta$ для некоторых значений $r_a$ и $P = 4 \cdot 10^{-4} \frac{a}{в^{3/2}м}$.

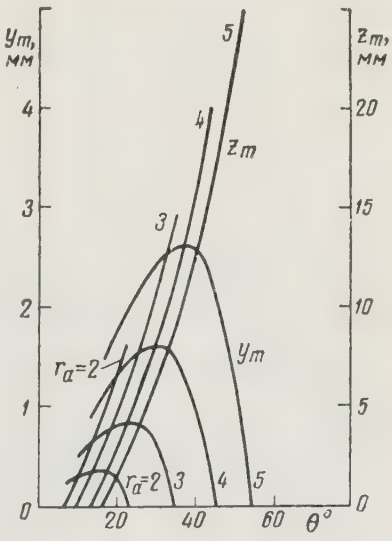



Рис. 5

Полученными данными можно пользоваться для ориентировочного расчета основных параметров электронного прожектора по заданным характеристикам потока электронов. Пусть, например, заданы ток $I$, анодное напряжение $U_a$, минимальная толщина потока $2y_m$, ширина его $l$ и допустимая плотность тока катода. Тогда определяем первеанс потока согласно соотношению $P = I_a / lU_a^{3/2}$, выбираем радиус анода $r_a$ и определяем $Pr_a$. По кривым рис. 4 находим для данного $Pr_a$ интервал возможных значений $\Theta$ в области фокусировки и по кривым рис. 5 выбираем то значение $\Theta$, которое соответствует заданной величине $y_m$, а также определяем $z_m$. Обращаясь опять к кривым рис. 4, находим искомое отношение $r_a / r_к$, соответствующее найденному значению $\Theta$. Находим $y_0 = r_a \operatorname{tg} \Theta$.

Электронные прожекторы, имевшие указанную выше форму электродов, с поперечным сечением анодного отверстия $1\times8$ *мм*, при $2\Theta = 30°$, $r_a / r_к = 0{,}36$, $r_a = 2$ *мм* обеспечивали в режимах, близких к расчетному, получение ленточного потока, величина тока в котором $I = 50$ *ма* ($U_a = 800$—$1000$ *в*) при коэффициенте токопрохождения 90—95%.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Pierce, Rectilinear electron flow in beams, J. Appl. Phys., 1940, **11**, 8, 548.
2. D. E. Radley, The theory of the Pierce type electron gun, J. Electronics and Control, 1958, 4, 2, 125—148.
3. М. Д. Габович, Влияние объемного заряда при распространении интенсивных пучков заряженных частиц, Успехи физ. наук, 1955, **56**, 2, 215.
4. H. Rothe, W. Kleen, Hochvakuum Electronenröhren, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Frankfurt a/M, 1955, **1**, 161.

Поступило в редакцию
18 II 1960

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ АВТОЭЛЕКТРОННЫХ КАТОДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ СВЧ

***М. И. Елинсон, В. А. Горьков***

Автоэлектронная эмиссия из металла или полупроводника может быть получена не только при использовании электростатических полей, но также и электрических полей, изменяющихся во времени*.

В 1958 г. нами были предложены системы, в которых эмиттирующие автоэлектроны острия помещались непосредственно в СВЧ-поля полых резонаторов или мощных волноводов, и проанализированы возможности таких систем [1] (см., например, рис. 1, 2).

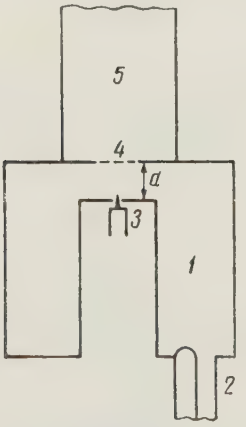



Рис. 1

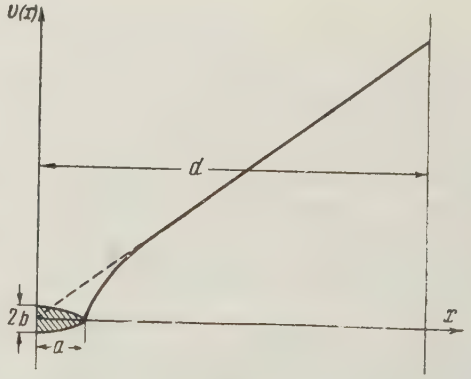



Рис. 2

Рис. 1. Острие в тороидальном резонаторе СВЧ:

*1* — резонатор; *2* — ввод мощности; *3* — острие с приспособлением для прогрева; *4* — мелкоструктурная сетка в стенке резонатора; *5* — эквипотенциальное пространство, в котором распространяются электронные пакеты; *d* — ширина зазора резонатора

Рис. 2. Распределение потенциала в зазоре резонатора с острием (сплошная кривая) и без острия (пунктирная кривая). При $a = 10$ *в* $E_0 \simeq 50\ E$ [3], где $E$ — однородное поле в резонаторе без острия. При $E \simeq 10^6$ *в/см* $E_0 \simeq 5\cdot10^7$ *в/см* и достаточно для получения высоких плотностей автоэлектронного тока

Впоследствии появились публикации о создании ряда важных типов электронных приборов, основанных на аналогичных идеях [2].

Целью настоящего сообщения является качественный теоретический анализ некоторых особенностей работы автоэлектронных катодов в электрических полях СВЧ, не нашедших отражения в работе [2].

* Поэтому применяющийся иногда термин «электростатическая эмиссия» может повести к недоразумениям.

1. Очевидно, что эмиссия автоэлектронного катода, работающего в синусоидальном электрическом поле вследствие резкой нелинейности вольтамперной характеристики будет происходить в виде кратковременных электронных пакетов.

Можно показать, что ~42% заряда, эмиттируемого за период, сосредоточено в интервале фаз 0,09 π (16°). При этом изменения электрического поля составляют $\Delta E = \pm 0{,}5\%$. Численное интегрирование одномерного (для простоты) релятивистского уравнения движения $m\ddot{x} \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} = E_a \sin \omega t$ позволяет оценить размеры электронных пакетов, их длительность и распределение в них пространственного заряда.

Рис. 3. Распределение плотности пространственного заряда в электронном пакете на выходе из резонатора

В интервале фаз (0,4—0,6) π при $E_a = 10^7$ *в/см*, $d = 0{,}1$ *см* и $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$ разброс времен пролета электронов в резонаторе составляет $\Delta t = 0{,}6$ %, а разброс скоростей $\Delta v = 0{,}4\%$. Протяженность пакета на выходе из резонатора $\Delta l = 3$ *мм* и его длительность $\Delta\tau = 10^{-11}$ *сек* (в интервале фаз (0,45—0,55) π $\Delta l = 1{,}5$ *мм* и $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-12}$ *сек*).

На рис. 3—5 представлено распределение пространственного заряда в электронных пакетах $\rho = \sum_{0{,}4\pi}^{0{,}6\pi} \frac{\Delta i_\varphi}{v_\varphi}$ на различных расстояниях от резонатора. Сосредоточение электронного заряда в голове пакета представляет преимущества для излучающих систем СВЧ (например, ондуляторов). Электронный луч в виде пакетов может быть использован также в ускорителях, приборах типа клистронов и пр.

В зависимости от мощности системы СВЧ, величины фокусирующего магнитного поля и степени ионной компенсации (если таковые применяются) концентрация электронов в пакете колеблется в пределах $10^{11}$—$10^{14}$ *см*$^{-3}$.

2. При работе автоэлектронного катода в системе СВЧ существенно изменяется характер ионной бомбардировки его.

Полагая угол пролета электронов в резонаторе пренебрежимо малым, принимая независимость сечения ионизации от координаты электрона и нерелятивистское приближение (для ионов), можно решить задачу о числе падающих в единицу времени на катод ионов и о их энергии. Элементарно можно получить

$$n_i = \frac{I_{\text{ср}}\, p}{2ekT} S_i d. \qquad (1)$$

Здесь $n_i$ — число ионов, падающих на катод в 1 *сек*; $I_{\text{ср}}$ — средний (по времени) электронный ток; $p$ — давление газа; $S_i$ — сечение ионизации; $d$ — ширина зазора резонатора СВЧ. Легко видеть, что $n_i$ составляет половину числа ионов, падающих на катод в статическом случае, что связано с особым характером движения ионов (сумма поступательного и колебательного движения).

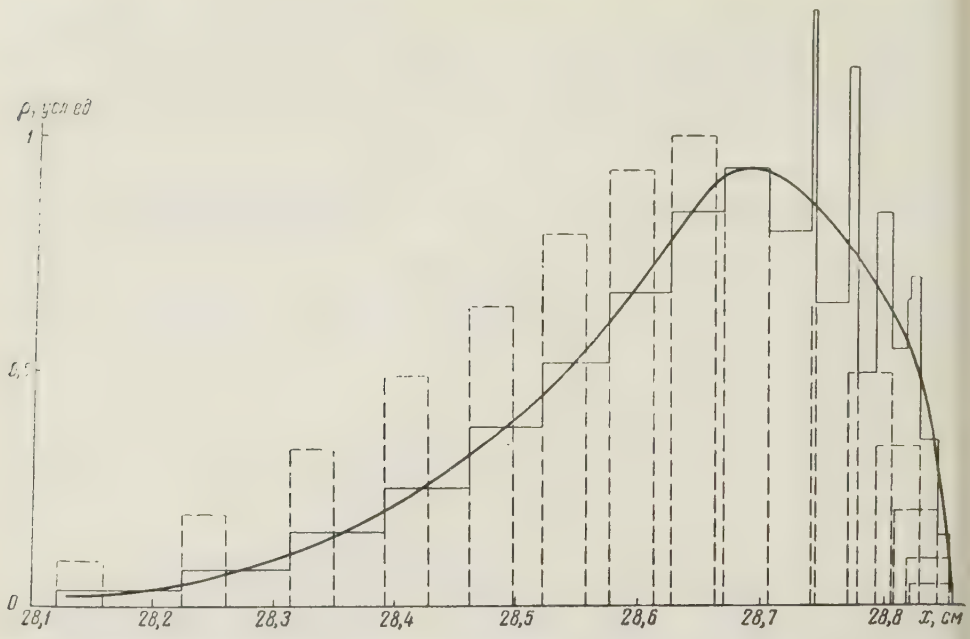



Рис. 4. Распределение плотности пространственного заряда в электронном пакете на расстоянии 30 *см* от резонатора

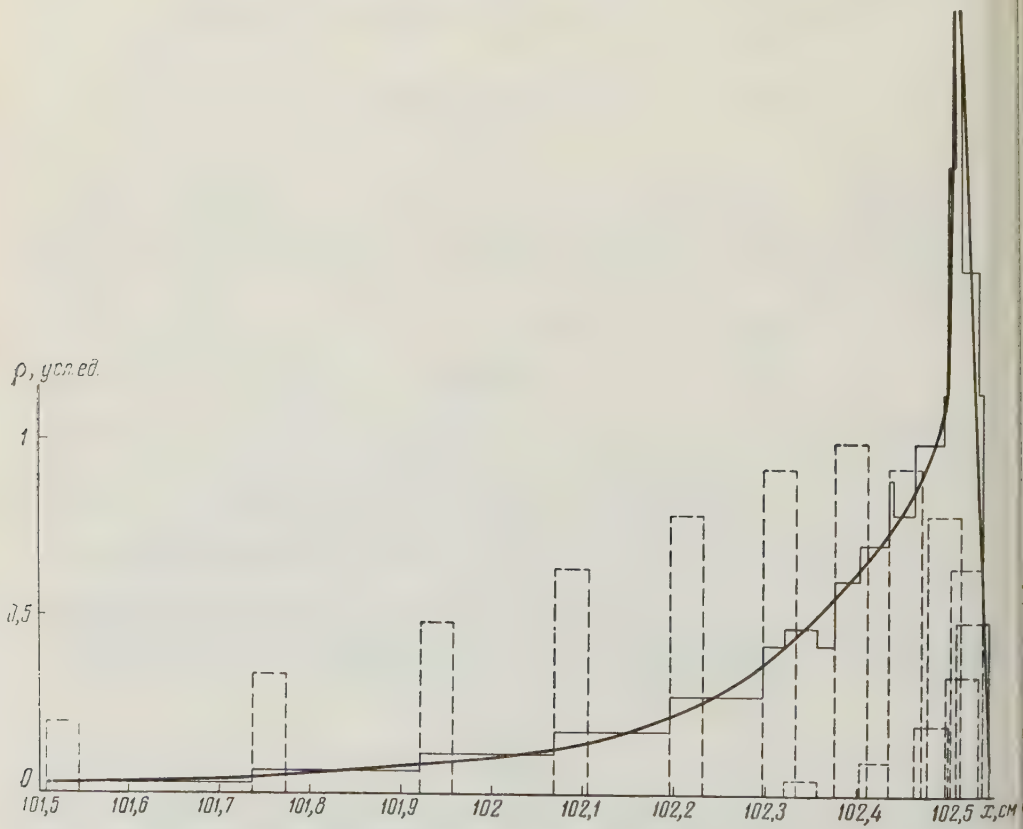



Рис. 5. Распределение плотности пространственного заряда в электронном пакете на расстоянии 100 *см* от резонатора

Скорость движения ионов

$$\dot{x} = \frac{eE_0}{m_i\omega}(\cos\omega t_0 - \cos\omega t). \quad (2)$$

Здесь $E_0$ — амплитуда поля СВЧ; $\omega$ — его круговая частота; $\omega t_0$ — фаза вылета электрона; $m_i$ — масса иона. Учитывая, что максимальное число ионов образуется при $\omega t_0 \simeq \pi/2$, получаем

$$\overline{\mathcal{E}}_i = \frac{e^2E_0^2}{2m_i\omega^2}. \quad (3)$$

Важно, что энергия падает с ростом массы иона, поскольку тяжелые ионы особенно эффективны в смысле процесса катодного распыления, а также резко падает с увеличением частоты изменения поля.

Более точный расчет для числа падающих ионов и для их энергии приводит к следующим выражениям:

$$n_i \simeq \frac{pS_i}{ekT}\,\frac{I_{\text{макс}}}{2\pi}\left[0{,}29d + \frac{0{,}44eE_0}{m_i\omega^2}\right], \quad (4)$$

где $I_{\text{макс}}$ — максимальное значение автоэлектронного тока,

$$\overline{\mathcal{E}}_i \simeq 1{,}25\,\frac{e^2E_0^2}{2m_i\omega^2}. \quad (5)$$

Для $m_i = 100\,m_{\text{H}}$, $E_0 = 10^7$ *в/см*, $\omega = 7{,}5\pi \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$ ($\lambda = 8$ *мм*) $\overline{\mathcal{E}}_i \simeq 10$ *эв*; для $m_i = 50\,m_{\text{H}}$ (аргон) $\overline{\mathcal{E}}_i \simeq 20$ *эв*. Видно, что энергии падающих ионов радикально уменьшаются по сравнению со статическим случаем и в приведенном примере близки к порогу катодного распыления.

В таких устройствах практически исключается проблема катодного распыления, и стабильность автоэлектронной эмиссии существенно повышается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Елинсон, В. А. Горьков, Авторск. свидетельство № 18430 от 27/V 1958 г. (Приоритет 16 I 1958 г..)
2. R. W. Dyke, IRE Trans., Military Electronics, 1960, 4, 1, 38—45.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957, стр. 45.

Поступило в редакцию
19 X 1960

---

## АДСОРБЦИЯ КАЛЬЦИЯ НА ВОЛЬФРАМЕ

*В. И. Макуха*

В связи с широким использованием в современных электровакуумных приборах различных видов сложных катодов (особенно на основе щелочноземельных металлов), соединяющих в себе свойства полупроводниковых и пленочных катодов, сильно возрос интерес к исследованию поведения пленок щелочноземельных металлов на тугоплавких металлах и, в частности, на вольфраме. Однако до сих пор исследованию подвергалась лишь система Ba — W [1—8], в то время как по системам Ca — W и Sr — W не опубликовано ни одной работы, хотя во многих сложных катодах использование добавок стронциевых или кальциевых соединений позволило значительно увеличить как плотность тока устойчиво снимаемой с катода эмиссии, так и долговечность катодов. Поэтому исследование системы Ca — W представляет большой интерес для выяснения роли кальция в механизме увеличения эмиссии сложных катодов.

В данном сообщении приводятся результаты исследования системы Ca — W при помощи автоэлектронного проектора [8] в условиях вакуума порядка (1—2) $\cdot 10^{-9}$ *мм* рт. ст. В качестве источника кальция был использован бериллат кальция в танталовой

лодочке. Кальций напылялся небольшими порциями на монокристаллическое вольфрамовое острие снизу, и осторожным нагреванием отдельные порции разгонялись по всей поверхности острия. После разгонки каждой порции изображение «замораживалось» и производилось измерение тока и напряжения, а также фотографирование эмиссионной картины.

Относительная работа выхода определялась из наклона характеристики [8]

$$\lg \frac{I}{V^2} = f(1/V).$$

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для нескольких вольфрамовых острий были сняты кривые зависимости работы выхода $\varphi$ от времени напыления кальция $t_н$. На рис. 1 показана одна из таких зависимостей. Для всех эмиттеров кривые $\bar{\varphi}(t_н)$ проходили через минимум, равный $2{,}4 \pm 0{,}1$ *эв*.

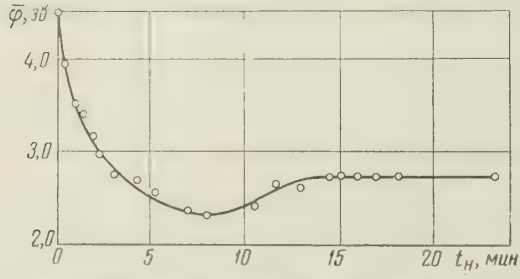



Рис. 1. Кривая зависимости $\bar{\varphi}$ от времени напыления Ca на W

На рис. 2 показан ряд картин при последовательном напылении (при комнатной температуре острия) отдельных порций кальция с последующим их разгоном по всей поверхности вольфрама (при температуре острия не выше 450°C).

Напыленный на половину острия тонкий слой Ca начинает мигрировать при 400°C, а при 500°C распространяется на все острие в течение 30 *сек*. При этом кальций избегает граней {110} и {100}. В первую очередь покрываются грани {112} и {113}, сливаясь в одно яркое пятно, покрываются также центры граней {111} (рис. 2, *а*). При последующем напылении Ca наползает на грани {116}, плотно располагается на {111} и образует, по-видимому, уже толстый слой на гранях {112}, ибо последние эмиттируют не столь сильно, а затем совсем перестают светиться (рис. 2, *б*). Рис. 2, *в* соответствует примерно оптимальному покрытию. Эмиттируют лишь грани {116} и в виде ярких треугольников {111}.

Применение метода «дополнительного напыления» [9] позволило убедиться в том, что на данной стадии мы имеем дело с картиной эмиссии исследуемой поверхности, определяемой сильно пониженной работой выхода при оптимальном покрытии. Средняя работа выхода при этом оказалась равной 2,4 *эв*. Напыление больших количеств Ca привело к картине, соответствующей работе выхода самого кальция (2,7—2,8 *эв*) и показанной на рис. 2, *г*, откуда видно, что начинают образовываться кристаллиты. Для некоторых острий автоэмиссионное изображение толстого слоя Ca было несколько иным при том же значении работы выхода.

Наиболее типичные стадии постепенного испарения Ca с вольфрама при 800°C. представлены на рис. 3. После прогрева в течение 15—30 *сек* Ca покидает грани {116}, проявляется яркими пятнами на гранях {112} и продолжает крепко удерживаться на {111} (рис. 3, *а*). При дальнейшем прогреве освобождаются грани {112}, треугольники октаэдра уменьшаются по величине, но эмиттируют еще сильно (рис. 3, *б*). На рис. 3, *в* грани {112} полностью освободились от кальция, {111} также почти очистились. Сильно эмиттируют лишь окружения этих граней. После 15—20 *мин* прогрева Ca полностью покидает вольфрам, картина эмиссионного изображения приобретает вид, соответствующий чистому вольфраму (рис. 3, *г*).

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Опыты показали, что миграция Ca начинается при 400°C, а испарение — при 700°C. Во время напыления Ca на вольфрам, при комнатной температуре последнего, могут образовываться кристаллиты, исчезающие при температуре ниже 400°C. Ни на одном из этапов напыления или испарения не наблюдалось следов кальция на гранях {110}. В отдельных случаях при напылении наблюдаются неяркие кольцевые окружения граней куба.

При испарении Ca покидает грани монокристалла в следующем порядке: {110}, {100}, {112}, {111} (ограничиваемся рассмотрением лишь основных кристаллографических направлений). Следовательно, последовательность граней в порядке уменьшения связи адатомов Ca будет {111}, {112}, {100}, {110}, т. е. наиболее прочные адсорбционные связи кальция имеют место на гранях {111}.

Использование некоторых представлений [1] приводит к следующим результатам.

1. Представление о «плотном соприкосновении» атомов объясняет отсутствие адсорбции Ca на гранях {110} и {100}, но не объясняет наличия адсорбции на гранях {111} и {112}. Действительно, изобразив сетку атомов Ca на этих гранях, мы не получим плотного их соприкосновения.

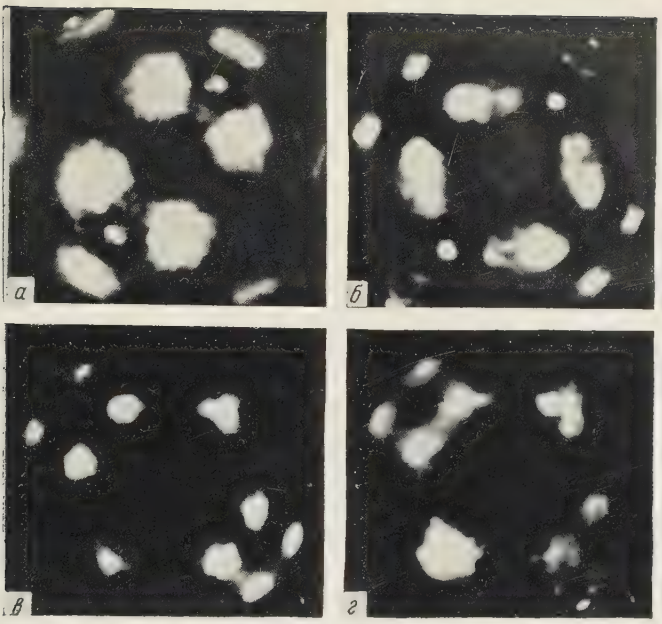



Рис. 2. Эмиссионные картины напыления кальция на вольфрам:

*а* — напыление в течение 1,5 *мин*, $\bar{\varphi} = 3{,}4$ *эв*; *б* — напыление в течение 4 *мин*, $\bar{\varphi} = 3{,}1$ *эв*; *в* — напыление в течение 10 *мин*, $\bar{\varphi} = 2{,}4$ *эв*; *г* — напыление в течение 25 *мин*, $\bar{\varphi} = 2{,}7$ *эв*

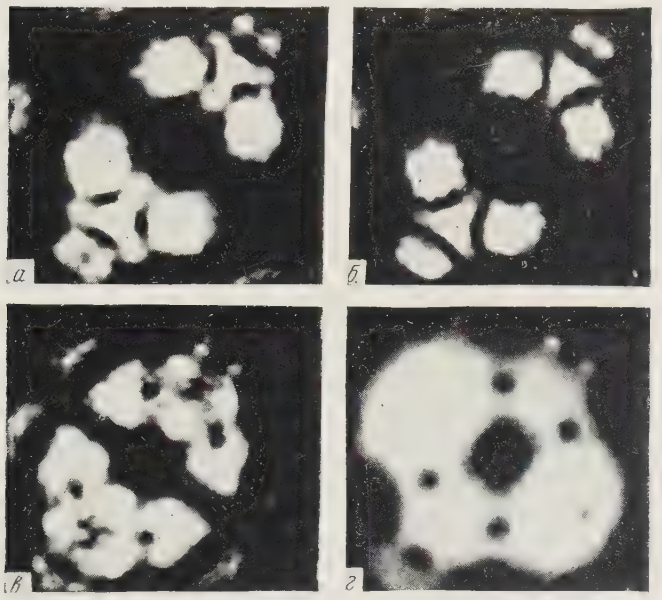



Рис. 3. Испарение кальция с вольфрама (при 800° С):

*а* — после 15 *сек*, $\bar{\varphi} = 3{,}1$ *эв*; *б* — после 40 *сек*, $\bar{\varphi} = 3{,}4$ *эв*; *в* — после 5 *мин*, $\varphi = 3{,}9$ *эв*; *г* — после 15 *мин*, $\bar{\varphi} = 4{,}5$ *эв*

2. Кристаллогеометрические соображения, усложненные еще требованием сохранения в адсорбированной пленке постоянной решетки, свойственной адсорбируемому веществу в кристаллическом состоянии, также не могут объяснить адсорбции Ca на гранях {111} и {112}. В этом нетрудно убедиться из данных табл. 3, приведенной в [1].

3. Исходя из точки зрения, развитой Дрехслером [7] и используя предложенный им график зависимости энергии связи на плоскостях кристалла вольфрама от отношения значений металлического радиуса адатома $\rho$ и атома подложки $r$, можно для Ca получить следующую последовательность граней в порядке уменьшения связи одиночного атома: {123}, {112}, {122}, {111}, {100}, {110}, что также не объясняет предпочтительной адсорбции Ca на гранях {111}. Адсорбцию же на гранях {112} можно объяснить тем, что связь одиночного атома Ca в «ямах» этой грани больше, чем на «седловинах» и в ямах других граней монокристалла вольфрама. По-видимому, в случае адсорбции Ca теорию одиночного атома Дрехслера можно применить к граням {112} с бо́льшим успехом, чем при адсорбции, например, Ba, который не дает столь «рыхлой» пленки как Ca.

Сравнение результатов эксперимента и применения к ним кристаллогеометрических представлений для случаев адсорбции кальция и бария [1] дано в таблице.

**Сравнение данных опыта с кристаллогеометрическими теориями адсорбции**

| Адатомы | Постоянная решетки, Å | Атомный диаметр, Å | Адсорбция в виде «когерентных» пленок: 1) по усложненной теории 2) по теории плотного соприкосновения | Последовательность граней в порядке уменьшения связи одиночного атома | Опыт |
|---|---|---|---|---|---|
| Ca (ГЦКС) | 5,56 | 3,94 | 1) невозможна на гранях {110} и {100}, {112}, {111} 2) тоже невозможна на этих гранях | {123}, {112}, {111}, {100}, {110} | на гранях {111} и {112} |
| Ba (ОЦКС) | 5,02 | 4,5 | 1) невозможна на гранях {110}, {100}, {111} 2) возможна на гранях {100}, {111} | {123}, {112} {100}, {111}, {110} | на гранях {111} и {100} отдельные случаи на гранях {123} |

Полученные результаты позволяют объяснить описанное в [10] увеличение эмиссии пленки бария на вольфраме при введении в нее кальция заполнением кальцием граней монокристалла вольфрама, на которых барий не адсорбируется. Этим явлением можно, по-видимому, частично объяснить и роль кальция в сложных катодах на основе бария.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Шуппе, Электронная эмиссия металлических кристаллов, Изд. САГУ, Ташкент, 1959.
2. E. Müller, Z. Phys., 1943, **120**, 270.
3. S. T. Martin, Phys. Rev., 1939, **56**, 1.XI, 947.
4. R. Haefer, Z. Phys., 1940, **116**, 9/10, 604.
5. M. Benjamin, R. O. Jenkins, Proc. Roy. Soc. A, 1942, **180**, 981, 225.
6. J. A. Becker, Bell. System Techn. J., 1951, **30**, 4, 907.
7. M. Drechsler, Z. Elektrochem., 1954, **58**, 5, 327.
8. В. Н. Шредник, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1958, **22**, 5, 594.
9. В. Н. Шредник, Физика твердого тела, 1959, **1**, 7, 1134.
10. I. Brodie, R. O. Jenkins, Proc. Phys. Soc. B, 1956, **69**, p. 12, 444B, 1343.

Московский физико-технический институт
Кафедра электронных и ионных приборов

Поступило в редакцию
29 VIII 1960

## АДСОРБЦИЯ СТРОНЦИЯ НА ВОЛЬФРАМЕ

*В. И. Макуха*

По методике, описанной ранее [1], была исследована система стронций на монокристалле вольфрама.

Для нескольких вольфрамовых острий были сняты кривые зависимости работы выхода $\bar{\varphi}$ от времени напыления стронция. Одна из таких зависимостей показана на рис. 1. Кривая $\varphi(t_н)$ проходит через минимум, равный ~2,2 *эв*.

На рис. 2 показан ряд картин при последовательном напылении отдельных порций стронция с последующим их разгоном по всей поверхности острия.

Напыленный на половину острия тонкий слой Sr начинает мигрировать при 450—500° С. В первую очередь при этом покрываются грани {233} и окружения куба. При последующем напылении стронций плотно располагается на {111} (рис. 2, *а*). Новые порции Sr приводят к картине, представленной на рис. 2, *б*, когда эмиттирующие грани {111} и {233} создают картину эмиссии в виде тройных лепестков. При дальнейшем напылении эти лепестки превращаются в яркие правильные треугольники на {111}. Фотография, показанная на рис. 2, *в*, соответствует примерно оптимальному покрытию. Эмиттируют грани {111}, {233} (лепестки как бы повернулись на 180° вокруг оси, проходящей через центр грани {111}) и в виде светлых ободков окружения граней {112}. Метод дополнительного напыления [2] подтвердил наличие оптимального слоя в данном случае. Средняя работа выхода при этом оказалась равной ~2,2 *эв*.

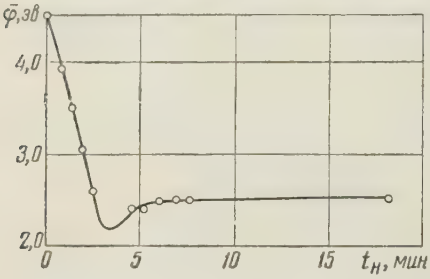



Рис. 1. Зависимость $\bar{\varphi}$ от времени напыления стронция на вольфрам

После дальнейшего напыления по наклону характеристики $\lg \frac{I}{V^2} = f(1/V)$ для толстого слоя стронция (см. рис. 2, *г*) получена величина $\bar{\varphi} = 2{,}5$—$2{,}6$ *эв*.

Наиболее типичные стадии испарения Sr с толстослойных покрытий при 800° С представлены на рис. 3. После 10—15 *сек* прогрева Sr плотнее собирается на гранях {233}, светлыми пятнами проявляется на {113}, центры граней октаэдра становятся темными (рис. 3, *а*). Дальнейший прогрев выявляет яркие треугольники на {111} (рис. 3, *б*), весьма устойчивые при последующих стадиях испарения. Последующее испарение освобождает от адатомов грани {111} (рис. 3, *в*). Изображение характерно для стадии предшествующей полному испарению стронция. После 20 *мин* прогрева при 900° С Sr полностью покидает монокристалл вольфрама и изображение острия приобретает вид, соответствующий чистому вольфраму (рис. 3, *г*).

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Миграция стронция начинается при 450—500°С, испарение — при 750—800°С. Во время напыления стронция на вольфрам, при комнатной температуре острия, образуются кристаллиты, исчезающие при ~400°С. Следов Sr на гранях {110} не наблюдалось ни на одном из этапов напыления или испарения. Вокруг граней куба стронций располагается в виде светлого «креста». Наблюдались случаи весьма недолговечных покрытий стронцием граней {112}. Эмиссионные картины на различных стадиях испарения стронция подобны изображениям на некоторых стадиях его напыления. В порядке уменьшения связи адатомов Sr грани вольфрама можно расположить в следующем порядке: {111}, {113}, {112}, {100}, {110}, т. е. наиболее прочные адсорбционные связи стронция имеют место на гранях {111}.

Использование некоторых представлений [3] приводит к следующим результатам.

1. Исходя из точки зрения Дрехслера [4] и используя предложенный им график, можно для Sr получить следующую последовательность граней в порядке уменьшения связи одиночного атома: {123}, {112}, {100}, {111}, {110}, что не объясняет предпочтительной адсорбции Sr на гранях {111}.

2. Кристаллогеометрические соображения, усложненные требованием сохранения в адсорбированной пленке постоянной решетки, свойственной адсорбируемому веществу в кристаллическом состоянии, не могут объяснить адсорбции Sr на гранях {111}, объясняя отсутствие последней на гранях {100}, {112}, {110}. В этом нетрудно убедиться из данных табл. 3, приведенной в [3].

3. Представление о «плотном соприкосновении» атомов объясняет наличие адсорбции на гранях {111} и отсутствие таковой на таких основных кристаллографических

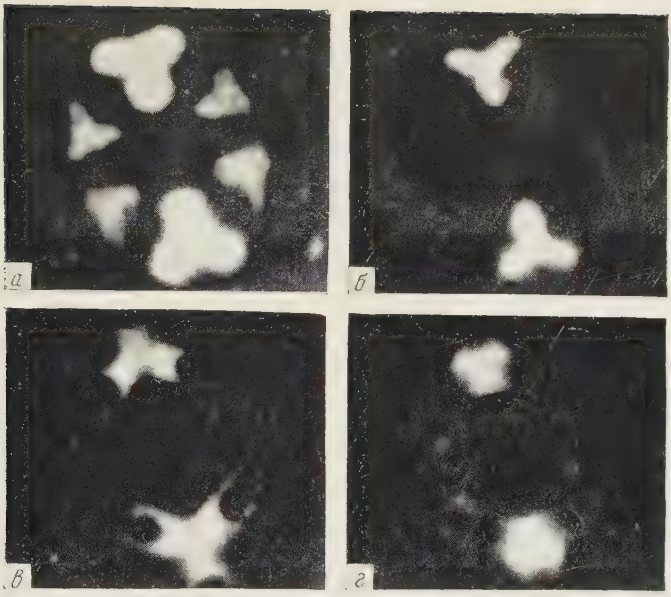


Рис. 2. Эмиссионные картины напыления стронция на вольфрам:

*а* — после 1,5 *мин*, $\bar{\varphi} = 3{,}5$ *эв*; *б* — после 2 *мин*, $\bar{\varphi} = 3$ *эв*; *в* — после 3,5 *мин*, $\bar{\varphi} = 2{,}2$ *эв*; *г* — после 7,5 *мин*, $\bar{\varphi} = 2{,}5$ *эв*

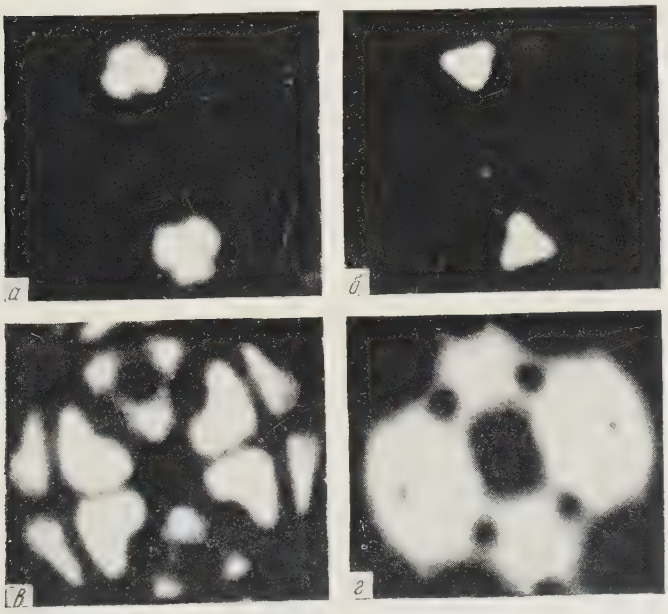


Рис. 3. Испарение стронция с вольфрама (при 800° С):

*а* — после 10 *сек*, $\bar{\varphi} = 2{,}5$ *эв*; *б* — после 40 *сек*, $\bar{\varphi} = 2{,}6$ *эв*; *в* — после 5 *мин*, $\bar{\varphi} = 4{,}2$ *эв*; *г* — после 25 *мин*, $\bar{\varphi} = 4{,}5$ *эв*

**Сравнение данных опыта с кристаллогеометрическими теориями адсорбции**

| атомы | Постоянная решетки, А | Атомный диаметр, А | Адсорбция в виде «когерентных» пленок: 1) по усложненной теории 2) по теории плотного соприкосновения | Последовательность граней в порядке уменьшения связи одиночного атома | Опыт |
|---|---|---|---|---|---|
| Sr (ЦКС) | 6,075 | 4,3 | 1) невозможна на гранях {110}, {112}, {100}, {111} 2) возможна почти плотная на гранях {100} и {111} | {123}, {112}, {100}, {111}, {110} | на грани {111} менее прочно, на гранях {223}, {113}, {233} |

правлениях как {112} и {110}, но не объясняет отсутствия адсорбции на гранях куба. йствительно, изобразив сетку атомов Sr на гранях {111}, получим почти «плотное» соприкосновение (несколько менее плотное чем для Ba). Такое же плотное соприсновение получим и на гранях {100}, хотя на последних Sr не адсорбируется.

Результаты эксперимента и применения к ним кристаллогеометрических представений для адсорбции Sr даны в таблице (аналогичные данные для Ba и Ca представлены в работе [1]).

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. И. Макуха, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 2, 339.
2. В. И. Шредник, Физика твердого тела, 1959, 1, 7, 1134.
3. Г. Н. Шуппе, Электронная эмиссия металлических кристаллов, Изд. САГУ, Ташкент, 1959.
4. M. Drechsler, Z. Elektrochem, 1954, 58, 5, 327.



Московский физико-технический институт
Кафедра электронных и ионных приборов



Поступило в редакцию
3 X 1960


---

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНОГО БАРИЯ В ОКСИДНОМ КАТОДЕ МЕТОДОМ РАДИОАКТИВНЫХ ИНДИКАТОРОВ


***В. П. Васильев, В. П. Помазков***


Для физики оксидного катода представляет большой интерес определение свободного бария в оксидном слое. Разработанные до сих пор методы основаны на реакции паров воды со свободным барием и измерении давления выделившегося водорода (метод Берденниковой) или же реакции с азотом и др. [1]. Одна из последних работ, также выполненная по методу Берденниковой [2], имела чувствительность $1 \cdot 10^{-8}$ *г*.

Предлагаемая нами методика основана на реакции свободного бария с одним из галогенов — йодом; в результате реакции получается довольно устойчивое соединение $BaJ_2$. Применявшийся радиоактивный изотоп йода $J^{131}$ был в виде водного раствора без носителя, что позволяло значительно увеличить чувствительность метода.

Для исследований применялась следующая методика очистки йода. Вначале, используя очень хорошую растворимость йода в бензоле, несколько капель водного раствора йода смешивались с бензолом и последний отделялся от воды. Здесь же добавлялось определенное количество стабильного йода — носителя, чтобы создать необходимое давление паров в экспериментальной лампе. Раствор йода в бензоле помещался в стеклянную трубку с 4—5 перетяжками и далее производилась вакуумная перегонка йода. Последняя часть трубки, где окончательно конденсировался йод, имела запаянный капилляр с бойком. Прежде чем перегонялся йод, вся трубка была тщательно обезгажена. Затем трубка с радиоактивным йодом приваривалась к экспериментальной лампе.

Лампа представляла собой диод с торцовым катодом диаметром 5 *мм* и плоским анодом. Материалом для керна служил никель чистейший (99,99%), отожженный в вакууме. Торец катода покрывался двойным карбонатом: 55% $BaCO_3$, 45% $SrCO_3$ на органическом биндере. Толщина покрытия составляла примерно 100—120 *мк*.

Активирование катода происходило при вакууме не хуже $5 \cdot 10^{-5}$ *мм* рт. ст. (т. е. в обычных заводских условиях) в два этапа. На первом этапе температура достигала 850°С, на втором — 1050°С с кратковременным отбором эмиссионного тока. В статическом режиме ток достигал 300—500 *ма/см*$^2$. Затем катод охлаждался и лампа отпаивалась при вакууме $10^{-7}$ *мм* рт. ст.

Сразу же после отпайки разбивался капилляр и пары йода проникали в лампу. Лампа помещалась в печь при 100—120° С на несколько часов, затем температура печи поднималась до 200°С, а конец ампулы охлаждался. В результате весь несвязанный йод собирался в одном месте прибора. После этого лампа вскрывалась и определялась радиоактивность катода и анода. Если же изучалось распределение радиоактивности в толще оксидного слоя, то катод парафинировался и делались срезы на специальном микротоме с толщиной среза по 10 *мк* каждый.

Высокая удельная активность $J^{131}$ позволяла надежно измерить его количество до $10^{-10}$ *г*. По количеству йода в оксидном покрытии можно легко определить количество свободного бария. Измеренное количество свободного бария на катодах было в среднем $5 \cdot 10^{-7}$ *г*, что соответствует концентрации примерно 0,05% по отношению к весу всего слоя. Кроме того, было обнаружено наличие свободного бария на поверхности анода, обращенной к катоду, в количестве $3 \cdot 10^{-8}$ *г*.

Для определения сорбции йода в оксидном слое были проделаны контрольные опыты. Для этого монтировалась лампа с двумя оксидными катодами и двумя анодами. Один из катодов активировался до получения стабильной эмиссии, как было указано выше, после чего в лампу впускался кислород при давлении в несколько атмосфер. После нескольких часов лампа вновь откачивалась и активировался второй катод, затем проводились обычные измерения с радиоактивным йодом. Количество свободного бария на неотравленном катоде было близко к указанным выше данным, на отравленном катоде оно не превышало $1 \cdot 10^{-9}$ *г*, на отравленном аноде $-5 \cdot 10^{-10}$ *г*.

Полученные результаты указывают, что сорбция йода в оксидном слое на два порядка по величине меньше количества йода, связанного со свободным барием в слое. Данные по распределению свободного бария в оксидном слое указывают на увеличение его концентрации от поверхности к керну. Количество свободного бария на анодах более низкое, по-видимому, потому, что из-за вакуумных условий некоторая часть испаряющегося с катода свободного бария связывается остаточными газами. В результате применения меченых атомов для определения концентрации свободного бария в оксидном катоде можно утверждать, что этот метод по крайней мере на два порядка чувствительнее других известных методов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Герман, С. Вагенер, Оксидный катод, ГТИ, 1949.
2. П. В. Ковтуненко, Б. М. Царев, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 5, 866.

Ташкентский государственный университет
Кафедра электрофизики

Поступило в редакцию
6 VII 1960

---

## ПОПРАВКА

В № 1 за 1961 г. на стр. 74 заглавие статьи следует читать:

Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. III. Волновод

В. В. Никольский

36

Könyvtára

## CONTENTS


**Lezin Yu. S.** Noise storage in delayed feedback devices . . . . . 187
**Nudelman P. Ya.** Linear correction of transients in systems with the limited width of a pass band . . . . . 193
**Lin Hai-chain.** On the calculation of the two-path channel capacity . . . . . 197
**Lin Hai- chain.** Capacity of one and two-path channel with polarization fadings 200
**Shabelnikov A. V.** Disturbances method and its connection with a strict diffraction method when solving problems of incoherent scattering . . . . . 204
**Ponomarev N. G.** Graphical method in designing aplanatic antennas . . . . . 214
**Tereshin O. N., Sokolov A. E.** Suppression of currents exited on a metal screen by a diffraction antenna of a limited length . . . . . 221
**Kazenellenbaum B. Z., Malina Z. A.** Calculation of tapers for a symmetrical magnetic wave in a round waveguide . . . . . 228
**Feldstein A. L.** Synthesis of step directional couplers . . . . . 234
**Kazantsev Yu. N.** Measurement of attenuation in waveguides . . . . . 241
**Muromtsev V. I., Piskunova A. K.** Some problems of microwave channel matching in radiospectroscopes . . . . . 250
**Rapoport G. N.** Backward-wave amplifiers in a strong signals regime . . . . . 261
**Kasatkin L. V.** Space charge waves amplification with electron streams passing through inductive suspectance media . . . . . 267
**Igritskii A. L.** Calculation of a magnetic periodic focusing device for TWT . . . . . 275
**Lobov G. D., Eremeev V. I.** Some effects following detection in a gas charge 286
**Elinson M. I., Stepanov G. V., Pokaliakin V. I.** Emission of hot electrons from $p - n$ junctions in SiC crystals . . . . . 292
**Fursey G. N.** Field emission from tungsten monocrystals in a prebreakdown current region . . . . . 298
**Miakishev G. Ya.** On the theory of statistic characteristics of a plane diode without incandescent cathode taking into account thermal electron velocity distribution . . . . . 303
**Nosov Yu. P.** Transfer processes in semiconductor diodes using narrow pulses of direct current . . . . . 313
**Grigoriants V. V., Zhabotinskii M. E.** Molecular frequency standart with substraction of the reference oscillator error . . . . . 321


*BRIEF REPORTS*


**Mikhailovskii L. K.** Wideband amplification with frequency conversion . . . 329
**Elkind A. I.** Harmonic suppression in a coaxial cavity . . . . . 331
**Bakhrakh L. E., Sulimin A. D.** Calculation of electron guns of a ribbon stream 333
**Elinson M. I., Gorkov V. A.** Some special features of field emission cathode operation in a microwave field . . . . . 336
**Makukha V. I.** Ca adsorption on W . . . . . 339
**Makukha V. I.** Sr adsorption on W . . . . . 342
**Vasiliev V. P., Pomazkov V. V.** Determination of free barium in oxide cathode by a radioactive indicator method . . . . . 343

Цена 1 руб. 38 коп.

*ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР*
*КОНТОРА „АКАДЕМКНИГА"*

## НОВЫЕ ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСТВА АКАДЕМИИ НАУК СССР НА 1961 ГОД

С 1961 года Издательство Академии наук СССР выпускает следующие шесть новых журналов:

### ВОПРОСЫ ИХТИОЛОГИИ

Орган Отделения биологических наук Академии наук СССР.
*Подписная цена на год (4 номера) — 6 руб.*

### ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

Орган Отделения физико-математических наук Академии наук СССР.
*Подписная цена на год (6 номеров) — 9 руб.*

### ИНЖЕНЕРНЫЙ ЖУРНАЛ

Орган Отделения технических наук Академии наук СССР и Института механики Академии наук СССР.
*Подписная цена на год (4 номера) — 6 руб.*

### НЕФТЕХИМИЯ

Орган Отделения химических наук Академии наук СССР.
*Подписная цена на год (6 номеров) — 7 руб. 5 коп.*

### ОКЕАНОЛОГИЯ

Орган Океанографической комиссии Академии наук СССР.
*Подписная цена на год (6 номеров) — 9 руб.*

### РАДИОБИОЛОГИЯ

Орган Отделения биологических наук Академии наук СССР.
*Подписная цена на год (6 номеров) — 7 руб. 50 коп.*

ПОДПИСКА НА НОВЫЕ ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР ПРИНИМАЕТСЯ ПОВСЕМЕСТНО В ПУНКТАХ ПОДПИСКИ «СОЮЗПЕЧАТИ», КОНТОРАХ И ОТДЕЛЕНИЯХ СВЯЗИ, А ТАКЖЕ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА» И КОНТОРОЙ «АКАДЕМКНИГА».

В СЛУЧАЕ ОТКАЗА В ПРИЕМЕ ПОДПИСКИ НА МЕСТАХ, ПОДПИСКУ ПРОСЬБА НАПРАВЛЯТЬ В АДРЕС БЛИЖАЙШЕГО МАГАЗИНА «АКАДЕМКНИГА» ИЛИ В КОНТОРУ «АКАДЕМКНИГА» ПО АДРЕСУ:

МОСКВА, ЦЕНТР, Б. ЧЕРКАССКИЙ ПЕР., 2/10

*«Академкнига»*

1961 MAR 1